תרגיל 4

1. תהי S קבוצה במרחב מטרי, ויהי $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

(א) $x \in S \setminus S'$.

(ב) קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B(x,\epsilon) \cap S = \{x\}$.

(ג) לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$ כך ש $x_n \to x$, מתקיים ש$\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

פתרון:

א$\Leftarrow$ב: $x \in S \setminus S'$, זה אומר שקיים $\epsilon > 0$ כך ש $(B(x,\epsilon) \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$. מנגד, $x \in S \cap B(x,\epsilon)$, ולכן $B(x,\epsilon) \cap S = \{x\}$.

ב $\Leftarrow$ג: תהי $S \supseteq \{x_n\} \to x$. עבור ה$\epsilon$ מסעיף א', החל ממקום מסויים מתקיים $x_n \in B(x,\epsilon)$. לכן $x_n = x$.

ג $\Leftarrow$א: נניח בשלילה ש$x \in S'$. זה אומר שיש סדרה בS שכל איבריה שונים ומתכנסת לx. בפרט, הסדרה הזאת לא קבועה לבסוף. סתירה.

2. חשבו את הסגור של הקבוצות הבאות:

(א) במרחב המטרי X של אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2...,n\}$, עם המטריקה הבאה $d : X \times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}.$$

מצאו את הסגור של הקבוצה A= אוסף הסדרות המתאפסות לבסוף.

(ב) ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ מצאו את הסגור של הקבוצה $A = 5\mathbb{Z}$.

(ג) ב $C[0,1]$ עם מטריקת המקסימום, מצאו את הסגור של הקבוצה $A = \{f : f(\frac{1}{2}) < 5\}$.

פתרון:

א. $cl(A) = X$. הוכחה: תהי סדרה $x \in X$. אנחנו רוצים למצוא סדרה של סדרות מתאפסות לבסוף שמתכנסת אליה. נגדיר x_n להיות סדרה שמזדהה עם x עד המקום הn, ואחרי זה מתאפסת. טענה: $x_n \to x$. הסבר: $d(x,x_n) \leq \frac{1}{n+1} \to 0$.

ב. $cl(A) = \mathbb{Z}$. הוכחה: נוכיח שלכל $z \in \mathbb{Z}$ יש סדרה ב$5\mathbb{Z}$ ששואפת אליו. שימו לב שמספיק להוכיח זאת עבור 1, כי אם $5\mathbb{Z} \supseteq \{x_n\} \to 1$, אז $5\mathbb{Z} \supseteq \{zx_n\} \to z$. ובכן, לכל n המספר 3^n זר ל5, ולכן הפיך ב $\mathbb{Z}_5$. כלומר, קיים a_n כך ש

$a_n 3^n \equiv -1 \mod 5$. וזה אומר ש $a_n 3^n + 1 \in 5\mathbb{Z}$. נשים לב ש $\{a_n 3^n + 1\}$ זאת סדרה ששואפת ל1 ב$(\mathbb{Z}, d_3)$.

ג. $\{5\}$ $cl(A) = \{f : f(\frac{1}{2}) \leq 5\}$. הוכחה: ראשית, זאת קבוצה סגורה, כי הוכחתם בש"ב קודמים שפונקציית ההצבה באיזשהו מספר היא רציפה, וזה המקור של הנקודון $\{5\}$ תחת פונקציה רציפה.

כעת, יהי $f \in X$ כך ש $f(\frac{1}{2}) \leq 5$. אנחנו רוצים סדרה בA ששואפת אליו. אם $f(\frac{1}{2}) < 5$, ניתן לקחת את הסדרה הקבועה. אחרת, נגדיר $f_n(x) = f(x) - \frac{1}{n}$. אז ברור ש $f(\frac{1}{2}) < 5$, וכן $d(f_n, f) = ||f - f_n|| = ||\frac{1}{n}|| = \frac{1}{n} \to 0$, לכן $f_n \to f$.

3. הוכיחו/הפריכו:

(א) $A'_1 \cup ... \cup A'_n = (A_1 \cup ... \cup A_n)'$.

(ב) $\bigcup A'_i = (\bigcup A_i)'$.פתרון:

א. הוכחה:

ברור שאם $A \subseteq B$ אז $A' \subseteq B'$, ולכן $A_i \subseteq (A_i \cup ... \cup A_n)$ גורר ש $A'_i \subseteq (A_1 \cup ... \cup A_n)'$, שגורר ש $(A'_1 \cup ... \cup A'_n) \subseteq (A_1, ..., A_n)'$.

מצד שני, נניח ש$x \in (A_1 \cup ... \cup A_n)'$. כלומר, יש סדרה שכל איבריה שונים $\{x_n\} \subseteq A_1 \cup ... \cup A_n$ $x \leftarrow$. מעיקרון שובך היונים, יש $1 \leq i \leq n$ כך שאינסוף מאיברי הסדרה נמצאים בA_i. זאת תת סדרה, שגם שואפת לx ולכן $x \in A'_i$, כלומר, $x \in A'_1 \cup ... \cup A'_n$.

ב. הפרכה: נקח $A_n = \{\frac{1}{n}\}$, תת קבוצה של $\mathbb{R}$. אז, לכל n, $A'_n = \emptyset$, ולכן $\bigcup A'_n = \emptyset$. אולם, $\bigcup A_n = \{\frac{1}{n} : \forall n \in \mathbb{N}\}$, ולכן $(\bigcup A_n)' = \{0\}$.

4. תהי A קבוצה חסום כליל במרחב מטרי כלשהו. הוכיחו שA חסומה.
פתרון:

נבחר $r = 1$. יש $a_1, ..., a_n \in A$ כך ש: $A \subseteq B(a_1, r) \cup ... \cup B(a_n, r)$. נסמן $s = \max_{1 \leq i,j \leq n} d(a_i, a_j)$. טענה: המרחק בין כל שני איברים בA חסום ע"י $s + 2$.
הוכחה: יהיו $x_1, x_2 \in A$. יש i, j כך ש$x_1 \in B(a_i, 1), x_2 \in B(a_j, 1)$. אזי $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, a_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, x_2) < s + 2$.

5. תהי $A = \mathbb{R} \cup \{p\}$ עבור $p \notin \mathbb{R}$, עם הטופולוגיה הבאה: $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{B \subseteq A : |B^c| \leq \aleph_0\}$. הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה.
פתרון:

נבדוק את 3 התכונות:

1. $\emptyset \in P(\mathbb{R})$ ולכן $\emptyset \in \tau$. בנוסף, $|A^c| \leq \aleph_0$ ולכן $A \in \tau$.

2. איחודים כלשהם: יהיו $O_i \in \tau$. אם כולן תת קבוצות של $\mathbb{R}$, אז כך גם האיחוד, ולכן הוא שייך לτ . אחרת, יש i כך ש$|O_i^c| \leq \aleph_0$. אז מתקיים: $(\bigcup O_i)^c \subseteq O_i^c$, ולכן הוא בן מניה. מכאן ש$\bigcup O_i \in \tau$.

3. חיתוכים סופיים: יהיו $O_1, ..., O_n \in \tau$. אם אחד מהם מוכל ב$\mathbb{R}$, אז כך גם החיתוך. אחרת, לכולם יש משלים בן מניה, ואז $|(O_1 \cap ... \cap O_n)^c| = |O_1^c \cup ... \cup O_n^c| \le |O_1^c| + ... + |O_n^c| \le \aleph_0$

6. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו־סופית. נניח שיש קבוצה $A \neq \emptyset, X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.
בטופולוגיה הקו־סופית. קבוצה היא סגורה אם ורק אם היא סופית. אם A סגוחה אז A סגורה וגם A^c סגורה. כלומר A סופית וגם A^c סופית. ולכן $X = A \cup A^c$ גם סופית.

(ב) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X, τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)
לא. כי אפשר לקחת כל קבוצה אינסופית X ואת $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ כאשר $a \in X$. קל לבדוק שזו טופולוגיה. יש גם דוגמא עם אינסוף קבוצות פתוחות. ניקח $X = \mathbb{N}$. נסמן $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \le n\}$. כלומר $A_n = \mathbb{N} \cap (0, n]$. ברור שכל A_n היא קבוצה סופית. קל לוודא ש $\tau = \{A_n\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ היא אכן טופולוגיה.

7. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(א) הטופולוגיה טריויאלית.

(ב) לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)
נניח שהטופולוגיה טריויאלית. ניקח סדרה x_n כלשהיא ואיבר x. צריך להוכיח ש $x_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כלשהיא כך ש $x \in U$. היות שהטופולוגיה טריויאלית, בהכרח $U = X$. ולכן בוודאי $\underline{x_n \in X}$ החל מ n מסוים (במקרה $n = 1$) ולכן $x_n \to X$. בכיוון השני, נניח שכל סדרה מתכנסת לכל מספר אבל הטופולוגיה לא טריויאלית. אז יש קבוצה פתוחה $U \neq \emptyset, X$ אז ניקח איזשהיא סדרה x_n שכל איבריה ב $X \backslash U$ ואיבר $x \in U$ אבל לפי הנתון $x_n \to x$ ולכן משלב מסוים $x_n \in U$ בסתירה.

8. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה

$$\tau = \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$$

כאשר

$$O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

(א) הוכיחו כי $(\mathbb{Z}, \tau)$ אכן מרחב טופולוגי.צריך להוכיח את שלושת האקסיומות של מרחב טופולוגי.

i. איחוד של פתוחות הוא פתוח: נסתכל על איחוד $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ של פתוחות.
את הקבוצות הריקות באיחוד הזה וודאי אפשר להשמיט. לכן נניח כי לכל $i \in I$ מתקיים $U_i \neq \emptyset$. אם האיחוד שווה לכל $\mathbb{Z}$ זו בוודאי קבוצה פתוחה. לכן ניתן להניח כי $\bigcup_{i \in I} U_i \subsetneqq \mathbb{Z}$ בפרט, אף אחת מהקבוצות הפתוחות האלה

היא לא $\mathbb{Z}$. לכן אפשר להניח שלכל $i \in I$ יש n_i כך ש $U_i = O_{n_i}$. ניקח $a \in \mathbb{Z}$ כך ש $a \notin U$. נשים לב ש a חסם מלרע של U כי אם $b \in U$ עם $b < a$ אז $b \in O_{n_i}$ עבור i כלשהוא ואז בוודאי $a \in O_{n_i} \subseteq U$. לכן U קבוצה של שלמים שחסומה מלרע ולכן יש לה מינימום, נסמן אותו $m = \min U$. כעת יש i כך ש

$$m \in O_{n_i}$$

נשים לב שכל איבר קטן מ m לא נמצא ב U (m מינימום כאמור). כל איבר גדול מ m כן נמצא ב U (כי הוא ב O_{n_i}) ולכן

$$U = O_m$$

שהיא קבוצה פתוחה כנדרש.

ii. חיתוך שתי קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה: נניח U ו V פתוחות. אם אחת מהן היא $\emptyset$ או $\mathbb{Z}$ הטענה מיידית. אחרת יש n, m כך ש

$$U = O_n \quad V = O_m$$

ואז ברור ש

$$U \cap V = O_{\max\{n,m\}}$$

שזו קבוצה פתוחה.

iii. $\emptyset, \mathbb{Z}$ הן קבוצות פתוחות: ברור מההגדרה.

(ב) מצאו את $cl(O_n)$.נשים לב שהקבוצות הסגורות בטופולוגיה זו הן $\emptyset, \mathbb{Z}$ ו $\{n, n-1, n-2, \ldots\}$ לכל $n \in \mathbb{Z}$. קל לראות שהקבוצה הסגורה היחידה שמכילה את O_n היא $\mathbb{Z}$ ולכן $cl(O_n) = \mathbb{Z}$.

(ג) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n \in \mathbb{Z}$.ניקח את הסדרה $a_n = n$. יהי $x \in \mathbb{Z}$, נוכיח ש $a_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כך ש $x \in U$. אם $U = \mathbb{Z}$ אז בוודאי $a_n \in \mathbb{Z}$ החל מ $n = 1$. אם $U = O_m$ אז $a_n \in U$ החל מ $n = m$. נשים לב ש $U \neq \emptyset$ כי $x \in U$.