

## מבחן באנליזה מודרנית 1

### מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות. כל סעיף שווה 8 נקודות. חומר עזר אסור. משך הבחינה שעתיים וחצי.

1. א. הגדירו  $\sigma$  אלגברה, מרחב מדיד, ומידה על מרחב זה.  
 ב. צטטו את משפט ההתכנסות המונוטונית.  
 ג. צטטו את משפט ההתכנסות החסומה.  
 ד. יהי  $(X, S, \mu)$  מרחב מידה חיובית ותהי  $f : X \rightarrow [0, \infty)$  מדידה  $d\mu$ . נניח ש- $E = \{x \in X : 0 \leq f(x) < 1\}$  בעלת מידה סופית. הוכיחו כי קיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{f^n(x)}{1 + f^n(x)} d\mu$  וחשבו את הגבול.
2. א. הגדירו פונקציה בעלת השתנות חסומה בקטע  $[a, b]$ .  
 ב. הוכיחו שכל פונקציה בעלת השתנות חסומה בקטע  $[a, b]$  מדידה לבג שם.
3. א. הגדירו קבוצות מדידות לבג ב- $\mathbb{R}$ .  
 ב. הגדירו קבוצות מסוג  $G_\delta$  ב- $\mathbb{R}$ .  
 ג. תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה כלשהי. נגדיר  $E$  להיות קבוצת כל הנקודות ב- $\mathbb{R}$  שבהן  $f$  רציפה. הוכיחו ש- $E$  מסוג  $G_\delta$ . (הדרכה: אם  $x \in E$  ואם  $n \in \mathbb{N}$  אז קיימת ל- $x$  סביבה שבה  $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{n}$ )
4. יהי  $(X, S, \mu)$  מרחב מידה חיובית.  
 א. הגדירו את המרחבים  $L^p(d\mu)$  עבור  $0 < p \leq \infty$ .  
 ב. עבור  $1 \leq p < \infty$  נניח ש- $f \in L^p(d\mu)$ . לכל  $\lambda > 0$  נגדיר  $E_\lambda = \{x \in X : |f(x)| \geq \lambda\}$ . הוכיחו שקיים  $M > 0$  כך שלכל  $\lambda > 0$   

$$\mu(E_\lambda) \leq \frac{M}{\lambda^p}$$
5. א. הגדירו מרחב הלבנט.  
 ב. יהיו  $H_1$  ו- $H_2$  שני מרחבי הלבנט ספרבילים מעל השדה  $k$ . הוכיחו שהם שקולים במובן הבא: קיימת  $T : H_1 \rightarrow H_2$  ליניארית ורציפה, חד-חד ערכית ועל, כך לכל  $x, y \in H_1$   $(Tx, Ty) = (x, y)$ .  
**בהצלחה!**