אלגברה לינארית 1

הרצאה 1

ברוכים הבאים!

"מקרא מתמטי" –

$\{\cdot,\cdot,\cdot\}$

$$2\in\mathbb{N}, \quad \tfrac{1}{2}\notin\mathbb{N}$$

$$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}\nsubseteq\mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$ – טבעיים $\{1,2,\dots\}$

$\mathbb{Z}$ – שלמים $\{\dots,-1,0,1,2,\dots\}$

$\mathbb{Q}$ – רציונליים $\left\{\frac{a}{b} \;\middle|\; \begin{matrix} a,b\in\mathbb{Z} \\ b\neq 0\end{matrix}\right\}$

$\mathbb{R}$ – ממשיים $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

$\mathbb{C}$ – מרוכבים $\{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

<u>הגדרה</u>: <u>שדה</u> הוא קבוצה $\mathbb{F}$ ביחד עם שתי פעולות: $+,\cdot$ $\;(+_F, \cdot_F)$ כך שמתקיימות האקסיומות הבאות:

1. <u>סגירות</u>: לכל $x,y\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$x + y \in \mathbb{F}$, $x \cdot y \in \mathbb{F}$

② קומוטטיביות (חילופיות):

$\forall x,y \in \mathbb{F}$, $x+y=y+x$

$x \cdot y = y \cdot x$

③ ניטרליים:

מניחים $\boxed{1 \neq 0}$

קיים איבר 0 ניטרלי לחיבור:

$\forall x \in \mathbb{F}$ $x+0=0+x=x$

קיים איבר 1 ניטרלי לכפל:

$\forall x \in \mathbb{F}$ $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

④* נגדי והופכי:

$\underbrace{\forall}_{\text{לכל}} x \in \mathbb{F} \ \underbrace{\exists}_{\text{קיים}} -x \in \mathbb{F}$

$x + \underbrace{(-x)}_{\text{נגדי}} = -x + x = 0$

$\forall \underset{\neq 0}{x} \in \mathbb{F} \ \exists \ x^{-1} \in \mathbb{F}$

$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

⑤ אסוציאטיביות (קיבוציות):

$\forall x,y,z \in \mathbb{F}$:

$\rightarrow x+(y+z)=(x+y)+z$

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

⑥ פילוג/דיסטריבוטיביות:

$\forall x,y,z \in \mathbb{F}$: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

קיימות:

$\mathbb{N}$ - אינם שדה

$\mathbb{Z}$ - אין איברים הופכיים

$\mathbb{Q}$ - שדה

$\mathbb{R}$ - שדה

$\mathbb{C}$ - שדה

<u>טענה</u> (תכונות של שדה):

לכל שדה $\mathbb{F}$ מתקיים -

(1) <u>צמצום</u>:

$$\forall x,y,z \qquad x+z=y+z \Longrightarrow x=y$$

$$\forall x,y,z \neq 0 \qquad x\cdot z=y\cdot z \Longrightarrow x=y$$

(2) <u>אין מחלקי אפס</u>: $[x\cdot y=0]$

לכל $x,y\neq 0$, לא ייתכן כי $x\cdot y=0$

(3) לכל $x\in\mathbb{F}$ מתקיים $x\cdot 0=0$

(4) לכל $x\in\mathbb{F}$ מתקיים $\underline{(-1)}\cdot\underline{x}=\underline{-x}$

<u>הוכחה</u>:

(1) נניח כי $x,y,z\in\mathbb{F}$ מקיימים: $x+z=y+z$

נחבר לשני האגפים את $-z$:

$$(x+z)+(-z)=(y+z)+(-z)$$

מאקסיומת האסוציאטיביות:

$$x+\underbrace{(z+(-z))}_{=0}=y+\underbrace{(z+(-z))}_{=0}$$

$$x=x+0=y+0=y$$

$x = x + 0 = y + 0 = y$

לכן $x=y$.

(2) נניח בשלילה שקיימים $0\neq x,y\in F$ אך $x\cdot y=0$.

מכיוון ש-$x\neq 0$ יש לנו הופכי x^{-1}. נכפיל בו:

$$\underbrace{x^{-1}\cdot(x\cdot y)}_{=} = x^{-1}\cdot 0 \overset{(3)}{=} 0$$

מצד שני,

$$y = 1\cdot y = (x^{-1}\cdot x)\cdot y$$

קיבלנו $y=0$, בסתירה להנחה.

(3) יהי $x\in F$. נחשב: 0 ניטרלי

$$(*)\qquad \underbrace{x\cdot 0}_{=} \overset{\downarrow}{=} x\cdot(0+0) \underset{\text{פילוג}}{=} \underbrace{x\cdot 0}+\underbrace{x\cdot 0}$$

בפרט, מתקיים:

$$\underbrace{x\cdot 0} + 0 \underset{\text{0 ניטרלי}}{=} x\cdot 0 \underset{(*)}{=} \underbrace{x\cdot 0} + x\cdot 0$$

נסיק, מחוקי הצמצום, כי $x\cdot 0=0$.

[<u>הערה</u>: <u>לא</u> קיים $y\in F$ המקיים $y\cdot 0=1$.
<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקיים y כזה. אזי:

$$0 \overset{(3)}{=} y\cdot 0 = 1$$
]

(4) יהי $x\in F$. נחשב כי:

$$\underline{(-1)\cdot x + x} = (-1)\cdot x + \underbrace{1}\cdot x =$$

$$= ((-1)+1)\cdot x = 0\cdot x \overset{(3)}{=} 0$$

$= ((-1)+1)\cdot x$ …

קיבלנו:

$(-1)\cdot x + x = 0 = -x + x$

מתכונת הצמצום: $(-1)\cdot x = -x$, כנדרש.

דוגמה - שדות שאריות

<u>הגדרה:</u> $\mathbb{Z}_n = \{0,1,\dots,n-1\}$ $(n>1)$

$\odot, \oplus$ המוגדרים לפי:

$a +_{\mathbb{Z}_n} b :=$ [שארית החלוקה של $a+b$ [חיבור רגיל] ב- n עם שארית]

$a \cdot_{\mathbb{Z}_n} b :=$

שארית החלוקה של $\underbrace{a\cdot b}_{\text{כפל רגיל}}$ ב- n עם שארית

$n=3$: $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$

$1 \oplus 2 = 0$, $2 \odot 2 = 1$ [+,·]

אילו אקסיומות מתקיימות ב- $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$?

סגירות, קומוטטיביות, ניטרליים (0, 1)

פילוג, אסוציאטיביות - מתקיימים (כי ב- $\mathbb{N}$)

$\mathbb{Z}_n \ni \boxed{n-x = -x}$

חיסור לשלמים

אכן: [$(n-x)\oplus x = 0$

חיבור בשלמים נותן n]

יש נגדיים!

זהו תנאי קיום ההפכיים.

טענה: קיום ההפכיים (כלומר $\mathbb{Z}_n$ שדה) $\xLeftrightarrow{\text{אם ורק אם}}$ $n=p$ ראשוני.

[מספר שאין לו מחלקים לא טריוויאליים.]

ראינו, לכל p ראשוני, $\mathbb{Z}_p$ שדה.

הוכחה - [אם $\mathbb{Z}_n$ שדה $\Leftarrow$ n ראשוני]:

נניח בשלילה כי n איננו ראשוני אך $\mathbb{Z}_n$ שדה.

לפי ההנחה, $\boxed{n=a\cdot b}$ כאשר $1<a,b<n$.

לכן: ב-$\mathbb{Z}_n$: $a\odot b=0$ בסתירה לטענה על מחלקי אפס (2). כנדרש. מ.ש.ל.

[כך הוכחנו את הכיוון השני!]

דוגמה חשובה: $p=2$, $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$.

זהו השדה הקטן ביותר שיש. XOR, AND.

$0\oplus 1=1$

$1\oplus 1=0$

$0\oplus 0=0$

$0\odot 1=0$

$1\odot 1=1$

תתי-שדות

הגדרה: אם $\mathbb{F},\mathbb{K}$ הם שדות ומתקיים:

* $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{K}$
* $+_{\mathbb{F}}=+_{\mathbb{K}}$, $\cdot_{\mathbb{F}}=\cdot_{\mathbb{K}}$

אומרים כי $\mathbb{F}$ הוא <u>תת-שדה</u> של $\mathbb{K}$.

<u>קריטריון לתת-שדה:</u>

נניח כי $\mathbb{K}$ <u>שדה</u> ו- $\underline{\mathbb{F}} \subseteq \mathbb{K}$ <u>תת-קבוצה</u>.

אם מתקיים:

(1) $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{F}$ (="1" של $\mathbb{K}$)

(2) לכל $x,y \in \mathbb{F}$ מתקיים: $\mathbb{F} \ni x-y \quad (x +_{\mathbb{K}} (-y)_{\mathbb{K}})$

(3) לכל $x,y \in \mathbb{F}$, $y \neq 0$ מתקיים: $\mathbb{F} \ni x \cdot_{\mathbb{K}} \underbrace{y^{-1}}_{\text{ההופכי ב-}\mathbb{K}}$

אזי $\mathbb{F}$ הינו תת-שדה של $\mathbb{K}$.
(ביחס לפעולות $+_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}$.)

<u>דוגמאות:</u>

* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ תת-שדה
* $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ תת-שדה

$$\underbrace{(x+i\cdot 0)}_{x}\cdot(y+i\cdot 0) = \underbrace{xy+i\cdot 0}_{xy}$$

כל ממשי הוא מספר מרוכב.

* $\underbrace{\{0,1\}}_{\mathbb{Z}_2} \subseteq \underbrace{\{0,1,2\}}_{\mathbb{Z}_3}$ $\quad +_{\mathbb{Z}_3}, \cdot_{\mathbb{Z}_3}$

הכלה של <u>קבוצות</u>.

אין מדובר באותן פעולות, ולכן $\mathbb{Z}_2$ איננו תת-שדה של $\mathbb{Z}_3$.

$$\begin{cases} 1 +_{\mathbb{Z}_2} 1 = 0 \\ 1 +_{\mathbb{Z}_3} 1 = 2 \end{cases}$$

$2 \neq 0$ ב-$\mathbb{Z}_3$, ולכן $+_{\mathbb{Z}_2} \neq +_{\mathbb{Z}_3}$.

שדה המרוכבים – $\mathbb{C}$

$(i^2=-1)$ $\quad x,y\in\mathbb{R}\quad$ $x+iy$

$z=\underbrace{x}_{Re}+i\underbrace{y}_{Im} \to \bar z = x-iy$

$z\bar z = x^2+y^2=|z|^2 \quad (|z|=\sqrt{x^2+y^2})$

$z+\bar z = 2Re(z),\quad z-\bar z = 2i\cdot Im(z)$

$\overline{w+z}=\bar w+\bar z,\quad \overline{wz}=\bar w\bar z,\quad \bar{\bar z}=z$

$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ א״ש המשולש:

הוכחה:

$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar z_1+\bar z_2)=$

$=\underbrace{z_1\bar z_1}_{|z_1|^2}+\underbrace{z_1\bar z_2+z_2\bar z_1}_{2Re(z_1\bar z_2)}+\underbrace{z_2\bar z_2}_{|z_2|^2}\le$

$$\begin{cases} w=x+iy \\ Re(w)=x\le\sqrt{x^2+y^2}=|w| \end{cases}$$

$\le |z_1|^2+2\underbrace{|z_1\bar z_2|}_{|z_1|\cdot|z_2|}+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2$

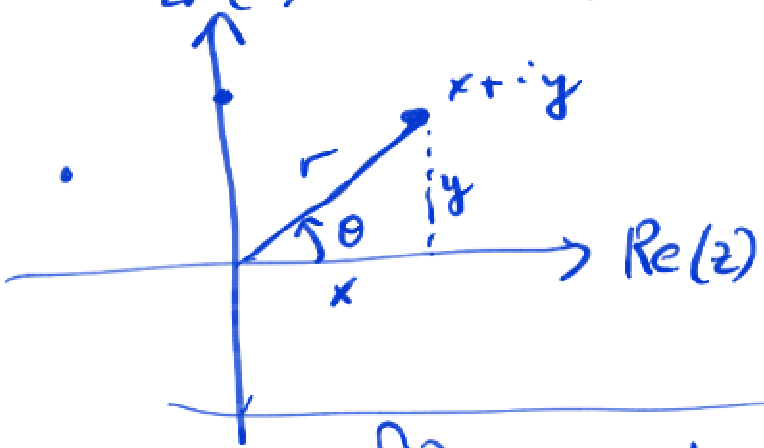
ומזה נובע א״ש המשולש.

[illegible] $\Leftarrow z = x+iy$ [illegible]

$$z = r\cdot\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{cis }\theta}$$

[illegible] $\quad r \in \mathbb{R}$

$0 \le \theta < 2\pi$



<u>קוטבי</u>	<u>קרטזי</u> $(z=x+iy)$
$z = r\cdot \text{cis}\,\theta$	$\rightsquigarrow$ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$
$r = \sqrt{x^2+y^2}$	$\longleftarrow$ $z = x+iy$
$\theta = \arctan y/x$	$x>0$
$(x\neq 0)$ $\theta = \arctan y/x + \pi$	$x<0$

$y>0,\ \theta = \pi/2$

$y<0,\ \theta = 3\pi/2$

? <u>$x=0$</u>

$\sqrt{2}\,\text{cis}\,\pi/4 \longleftarrow 1+i$

$3\,\text{cis}\,\pi/3 \rightsquigarrow \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

[illegible]

$$(x+iy)(w+iz) = (xw-yz)+i(xz+yw)$$

כפל -

$$(r_1 \operatorname{cis}\theta_1)(r_2 \operatorname{cis}\theta_2) = (r_1 r_2)\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$$

<u>הוכחה</u>: עזר לנוסחאות קוסינוס: $(r_1=r_2=1)$

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) =$$

$$= \underbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i\underbrace{(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)}_{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

<u>משפט</u> (דה מואבר):

$$(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$$

<u>הוצאת שורש</u>:

$$z = r\operatorname{cis}\theta$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\theta/n$$

$$\sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta+2\pi}{n}$$

$$\dots$$

$$\sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta+2\pi k}{n} \quad : \quad k=0,1,\dots,n-1$$

<u>דוגמה</u>:

$$\sqrt[2]{-1} = \sqrt[2]{\operatorname{cis}\pi} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}, \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$$

משפט (המשפט היסודי של האלגברה):

יהי $p(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$ $\quad (a_i\in\mathbb{C})$

אזי ל-p יש שורש מרוכב אחד לפחות.

$$\left(z^n-\alpha \rightsquigarrow \sqrt[n]{|\alpha|}\cdot cis\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$$

מערכות משוואות ליניאריות ומטריצות

(עובדים מעל שדה $\mathbb{F}$.)

$a_{ij}\in\mathbb{F}$, $b_i\in\mathbb{F}$, x_i נעלמים

$$\boxed{\begin{matrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{matrix}}$$

פתרון - $(x_1,\dots,x_n)$, $\quad x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}$

הצגה מטריצית:

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{array}\begin{array}{cccc|c} C_1 & \dots & C_n & & \\ \hline a_{11} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{array}$$

α

$R_1\leftarrow\alpha R_1$

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=5 \end{cases} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

הגדרה: מע' משוואות נקראת **הומוגנית** אם
$b_1 = \dots = b_m = 0$

הגדרה: **פעולת דירוג אלמנטרית** הן אחת מבין 3 סוגי הפעולות הבאות:

(1) החלפת שורה $R_i \leftrightarrow R_j$

(2) כפל בסקלר $R_i \leftarrow \alpha R_i$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$

(3) הוספת שורה $R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$
כאשר $\alpha \in \mathbb{F}$, $i \neq j$

דוגמה:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 10 \\ -11 & 8 & -27 \end{array}\right]$$

טענה:
אם המט' B התקבלה מ-A ע"י פעולת דירוג אלמנטרית, אזי כל פתרון של A הוא גם פתרון של B.

הוכחה:
ע"מ להוכיח את הטענה עלינו לבדוק כי כל אחת מבין 3 הפעולות שהגדרנו שומרת על הפתרונות.

(1) $\left[a_{11} \ \cdots \ a_{1n} \mid b_1 \right.$ ... R_i

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

$x_1, \dots, x_n$ פתרים לכל של מספר המשוואות.

(ב) $x_1, \dots, x_n$ פתרים של המערכת המקורית אזי:

לכל $i \neq j$, הרי כי R_j מתקיימת.

לגבי R_i:

$$a_{i1}X_1 + \dots + a_{in}X_n = b_i$$

המשוואה החדשה:

$$\alpha a_{i1}X_1 + \dots + \alpha a_{in}X_n = \alpha b_i$$

לכן הרי כי $R_i \leftarrow \alpha R_i$ גם מתקיימת.

(ג) לפעולה שלישית:

$$R_i \leftarrow \underline{R_i + \alpha R_j}$$

לכל $k \neq i$, השורה R_k לא השתנתה.

לגבי R_i:

$$\left[\begin{array}{l} a_{i1}X_1 + \dots + a_{in}X_n = b_i \\ a_{j1}X_1 + \dots + a_{jn}X_n = b_j \end{array}\right.$$

$$(a_{i1} + \alpha a_{j1})X_1 + \dots + (a_{in} + \alpha a_{jn})X_n = b_i + \alpha b_j$$

מ.ש.ל.

טענה: אם B התקבלה מ- A ע"י פעולות שורה אלמנטריות, אזי גם A מתקבלת מ- B ע"י פעולות שורה אלמנטריות.

<u>הוכחה:</u>

על מנת להוכיח את הטענה, נסתכל כי ניתן להפוך את כל אחת ואחת מן הפעולות שבדרך.

$$\left[\begin{array}{l} A \xrightarrow{P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_m} B \\ B \xrightarrow{P_m^{-1} \quad P_{m-1}^{-1} \quad \cdots \quad P_1^{-1}} A \end{array}\right]$$

(1) $R_i \leftrightarrow R_j$: $R_i \leftrightarrow R_j$

(2) $R_i \leftarrow \alpha R_i$: $R_i \leftarrow \alpha^{-1} R_i$

(3) $R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$: $R_i \leftarrow R_i - \alpha R_j$

מ.ש.ל.

<u>הגדרה:</u> <u>מטריצה מדורגת</u> היא מטריצה:

(1) שורות אפסים (אם יש) - בתחתית

(2) כל איבר מוביל נמצא מימין לאיבר המוביל שמעליו.

איבר מוביל = הראשון בשורה שאינו 0.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \end{matrix}\right. \end{array} \qquad \left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 8 & 8 \end{matrix}\right.$$

הערה: לכל מטריצה תיתכנה מספר צורות מדורגות.

אם הגענו מ-A ל-B באמצעות פעולות דירוג אלמנטריות: A, B **שקולות שורה**.

הגדרה: **משתנה חופשי** הינו משתנה שבעמודה שלו אין איבר מוביל, כאשר המט' מדורגת.

$$x_2 \text{ חופשי} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \leftarrow$$

* **משתנה תלוי** הוא משתנה שאינו חופשי.

הערה: משתנה חופשי יכול לקבל כל ערך שהוא. בהינתן הצבה של המשתנים החופשיים, ישנו [לכל היותר] **פתרון יחיד** למשתנים התלויים.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_3 = 2 \Rightarrow \boxed{x_3 = 2/3} \end{cases}$$

$$\boxed{x_1} = 2 - x_2 - 4/3 = 2/3 - x_2$$

כאשר נקבע הצבה שרירותית ל-x_2, נקבל פתרון

יחיד של x_1.

הגדרה: שורת אפסים: $[0 \; \cdots \; 0 \; \vdots \; b]$

$b\neq 0 \Leftarrow$ שורת סתירה.

הערה: למערכת הומוגנית — תמיד יש פתרון ($\underbrace{}_{\text{לפחות פתרון אחד}}$) $x_1=\dots=x_n=0$

הגדרה: מטריצה מדורגת קנונית:

- מטריצה מדורגת שהאיברים המובילים הם $=1$
- מעל כל איבר מוביל יש רק אפסים.

דוגמה:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \cancel{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}}$$

מדורגת קנונית — מדורגת, אך לא קנונית

משפט: בכל צורה מדורגת של מע' משוואות, יש אותם משתנים תלויים.

הוכחה: בשלילה. נניח כי A, B שקולות שורה, ושתיהן מדורגות.

אם יש שורות אפסים — נתעלם.

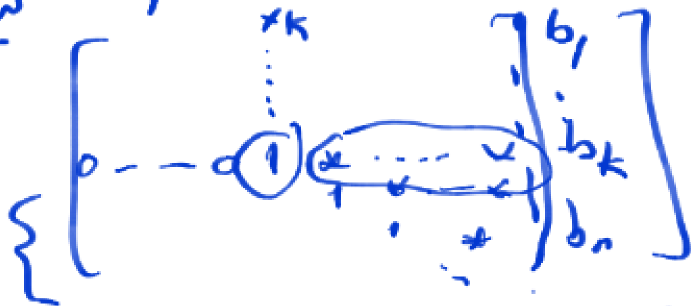
נניח בשלילה כי x_k תלוי ב-A וחופשי ב-B.

ניקח את k הגדול ביותר שעבורו זה מתקיים.

לכן, לכל $l>k$, x_l חופשי ב-$A \Leftrightarrow B$

תלוי ב-$A \Leftrightarrow B$

ויש $n \geq i \geq k+1$ שעבורו x_i משתנה חופשי, נציב $x_i=0$.
נקבל פתרון יחיד ל- x_k בהינתן הצבה זו.
ב- A.



מצד שני, ב- B המשתנה y_k הוא חופשי,
ולכן ניתן להציב $x_k=1$. סתירה,
לכך שהראינו שמע' שקולות שורה [=כאלה שנובעת
מאחת מהשניה בעזרת פעולות דירוג אלמנטריות]
מקיימות את אותם הפתרונות בדיוק.

מסקנה [מספר הפתרונות]:
עוברים לצורה מדורגת:

① אם יש שורת סתירה $\longrightarrow$ אין פתרון.

② אם אין שורת סתירה

– אין משתנים חופשיים: ①

– יש משתנים חופשיים $k>0$: ∞

[בערה: $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_p$, מס' הפתרונות
יהיה p^k.]

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ....

דוגמה: מצאו את הפתרון הכללי למע':

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$ $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

אין שורה מקולקלת. $\Longrightarrow$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

תלויים $x_{1,3}$, חופשי x_2

<u>דוגמה נוספת:</u>

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{array}\right] \end{array} \Longleftrightarrow 4x_3 = 6$$

$$4x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 3/2$$

$$x_1 = 5 - 2x_3 - 3x_4 = 2 - 3x_4$$

$$[1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = 5] \qquad x_2 = t,\ x_4 = s$$

$$(2-3s,\ t,\ 3/2,\ s) =$$

$$= \boxed{(2,0,3/2,0) + (-3,0,0,1)\cdot s + (0,1,0,0)\cdot t}$$

<u>אלגוריתם גאוס לדירוג</u>

1 - עוברים עמודה-עמודה [משמאל לימין]

2 - מחפשים איבר $\neq 0$ [אם אין - עוברים עמודה]

3 - מנרמל ($\alpha \to 1$)

4 - מאפס את כל האיברים מתחתיו

ובסוף, מאפסים את כל האיברים שמעל המובילים

[עמודה-עמודה מימין משמאל].

הגענו מדורגת קנונית!

דוגמה:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -3 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 5R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 27/2 & 15/4 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{2}{27}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 + \frac{3}{2}R_3]{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/9 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/18 \end{array}\right] \begin{array}{l} = x_1 \\ = x_2 \\ = x_3 \end{array}$$

דוגמה: [מצא הראשונית]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$[\,1 \quad 2 \quad 1\,]$ $\qquad$ $[\,1 \quad 2 \quad 1\,]$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

זו צורה מדורגת קנונית.

מסקנה: לכל מט' קיימת צורה מדורגת קנונית.

משפט: הצורה המדורגת הקנונית יחידה.

הוכחה: בפעם הבאה.