פתרון מבחן מכינה תשע"ה

1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>1 \\ x+|x| & -1<x\le 1 \\ x+1 & x\le -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(x)+|f(x)|\le 1$

תחום ראשון $x>1$

אי השיוויון נראה כך

$$x^2+|x^2|\le 1$$

$$2x^2\le 1$$

$$x^2\le \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

לא מתקיים בתחום.

תחום שני $0\le x\le 1$

אי השיוויון נראה כך

$$x+|x|+\left|x+|x|\right|\le 1$$

$$4x\le 1$$

$$x\le \frac{1}{4}$$

לא מתקיים עבור $\frac{1}{4}<x\le 1$ כן מתקיים עבור $0\le x\le \frac{1}{4}$

תחום שלישי $-1<x<0$

אי השיוויון נראה כך

$$x+|x|+\left|x+|x|\right|\le 1$$

נשים לב שכיוון ש x שלילי בתחום זה, $x+|x|=x-x=0$

ולכן אי השיוויון הוא $0\le 1$ המתקיים בכל התחום.

כעת לתחום הרביעי $x \leq -1$

אי השיוויון נראה כך:

$$x + 1 + |x + 1| \leq 1$$

כיוון ש $x \leq -1$ נובע כי $x + 1 \leq 0$ ולכן בעצם אי השיוויון נראה כך

$$x + 1 - (x + 1) \leq 1$$

כלומר

$$0 \leq 1$$

מתקיים בכל התחום.

סה"כ x מקיים את אי השיוויון אם ורק אם $x \leq \frac{1}{4}$

2. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $z^4 - z^2 = -1$

נציב $w = z^2$ ולכן

$$w^2 - w + 1 = 0$$

$$w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

גם ל w_1 וגם ל w_2 צריך למצוא את שני הפתרונות ל $z^2 = w_i$

$$|w_1| = |w_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

עבור $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ מתקיים כי $\frac{1}{2} > 0$ ולכן

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

עבור $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ גם $Re(w_1) > 0$ ולכן

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

הפתרונות שלנו הם

$$z_{1,2} = \sqrt{1} cis\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right)$$

עבור $k = 0,1$

וכמו כן

$$z_{3,4} = \sqrt{1} cis\left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right)$$

עבור $k = 0,1$

3. יהי וקטור $v = (a,b,c)$, אשר מאונך לכל וקטור במרחב.
הוכיחו כי v הוא ראשית הצירים.

דרך אחת:

$$(a,b,c)(1,0,0) = a = 0$$

$$(a,b,c)(0,1,0) = b = 0$$

$$(a,b,c)(0,0,1) = c = 0$$

ולכן סה"כ

$$(a,b,c) = (0,0,0)$$

דרך שנייה:

$$(a,b,c)(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

ולכן

$$(a,b,c) = (0,0,0)$$

4. נתונה סדרה המקיימת $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ ו-$a_1 = 4$
הוכיחו באינדוקציה כי לכל n מתקיים $a_n > 3$

בדיקה: עבור $n = 1$ אכן $a_1 = 4 > 3$

בהנתן n עבורו $a_n > 3$

צ"ל $a_{n+1} > 3$

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{6 + 3} = 3$$

.5

א. הפעילו אינטגרציה בחלקים על האינטגרל (הידוע) $\int \frac{1}{x^2+1} dx$, כאשר $f' = 1$

ב. השתמשו בנוסחא מהסעיף הקודם על מנת לחשב את האינטגרל $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

.א

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \begin{Bmatrix} f' = 1 & g = \frac{1}{x^2+1} \\ f = x & g' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \end{Bmatrix} = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

התשובה לסעיף היא

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

.ב

לפי סעיף א',

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2(x^2+1)}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

לכן

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \arctan(x) - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

.6 <u>הגדרה:</u> פונקציה f נקראת **זוגית** אם היא מקיימת את התנאי

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = f(-x)$$

א. נסחו תנאי השקול לכך שהפונקציה f **אינה** זוגית

ב. קבעו **והוכיחו** אילו מן הפונקציות הבאות הן זוגיות, ואילו לא:

$$f(x) = (e^x)^2, g(x) = e^{\cos(x)}, h(x) = (x+1)x$$

.א

$$\exists x \in \mathbb{R}: f(x) \neq f(-x)$$

.ב

נוכיח ש$h(x)$ אינה זוגית. נבחר $x = 1$ ונוכיח $h(1) \neq h(-1)$

אכן $h(1) = 2$ ואילו $h(-1) = 0$

נוכיח ש$g(x)$ זוגית.

יהי $x \in \mathbb{R}$ צ"ל

$$g(x) = g(-x)$$

אכן

$$g(-x) = e^{\cos(-x)} = e^{\cos(x)} = g(x)$$

נוכיח כי $f(x)$ אינה זוגית.

נבחר $x = \ln(2)$ ונוכיח כי $f(\ln(2)) \neq f(-\ln(2))$

$$f(\ln(2)) = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$f(-\ln(2)) = \left(e^{-\ln(2)}\right)^2 = \left(\frac{1}{e^{\ln(2)}}\right)^2 = \frac{1}{4} \neq 4$$

7. הוכיחו/הפריכו: לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $(A\backslash B) \cup C = (C \cup A)\backslash(B\backslash C)$

נוכיח להוכיח:

תהיינה A, B, C קבוצות

נעשה הכלה דו כיוונית.

בכיוון 1:

יהי $x \in (A \setminus B) \cup C$

צ"ל $x \in (C \cup A) \setminus (B \setminus C)$

נתון לנו ש $x \in A \setminus B$ או $x \in C$

נחלק למקרים $x \in C$ או $x \notin C$

אם $x \in C$ ברור ש $x \in C \cup A$

כמו כן, כיוון ש$x \in C$ ברור ש $x \notin B \setminus C$

ביחד, $x \in (C \cup A) \setminus (B \setminus C)$ כפי שרצינו.

כעת אם $x \notin C$ אז כיוון ש $x \in C$ או $x \in A \setminus B$ נובע כי $x \in A \setminus B$

לכן $x \in A, x \notin B, \notin C$

כיוון $x \in A$ נובע כי $x \in C \cup A$

כיוון ש $x \notin B$ נובע כי $x \notin B \setminus C$ וביחד נקבל כי $x \in (C \cup A) \setminus (B \setminus C)$

כעת הכלה בכיוון השני:

יהי $x \in (C \cup A) \setminus (B \setminus C)$

צ"ל $x \in (A \setminus B) \cup C$

נב"ש $x \notin A \setminus B$ וגם $x \notin C$

כיוון ש $x \in (C \cup A) \setminus (B \setminus C)$ נובע כי $x \in C \cup A$

אבל, כיוון ש $x \notin C$ נובע כי $x \in A$

כיוון ש $x \in A$ וכן $x \notin A \setminus B$ נובע כי $x \in B$.

כעת כיוון ש $x \in B, x \notin C$ נובע כי $x \in B \setminus C$ סתירה לכך ש$x \in (C \cup A) \setminus (B \setminus C)$.

הערה:

תרגילים כאלה ניתן להוכיח גם באמצעות סוג של טבלאות אמת (קוראים לזה טבלאת שייכות).

במכינה, זה חותר תחת המטרה שלנו – ללמוד כיצד לכתוב הוכחות.

(שיטת הוכחה זו היא בעצם החלוקה האולטימטיבית למקרים.)

כמו כן, בחלק מהתרגילים היותר מורכבים (אפילו במכינה) זה לא יעבוד.

בכל זאת נראה כיצד עושים זאת בדוגמא הזו

יהי x,

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in (A \setminus B) \cup C$	$x \in (C \cup A) \setminus (B \setminus C)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	T	T
F	F	F	F	F