בדידה 1 תרגיל 4

18 בדצמבר 2016

1. תהי U הקבוצה האוניברסלית.
א. הוכיחו או הפריכו: $A\cap[(B\cup A^c)\cap B^c]=\phi$.
ב. יהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות המוכלות ב U. הוכיחו כי $(\cap_{i\in I}A_i)^c=\cup_{i\in I}A_i^c$.
ג. יהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות המוכלות ב U. הוכיחו כי $(\cup_{i\in I}A_i)^c=\cap_{i\in I}A_i^c$.
פתרון:

א. הוכחה: $A\cap[(B\cup A^c)\cap B^c]=[A\cap(B\cup A^c)]\cap B^c=[(A\cap B)\cup(A\cap A^c)]\cap B^c=[(A\cap B)\cup\phi]\cap B^c=(A\cap B)\cap B^c=A\cap(B\cap B^c)=A\cap\phi=\phi$.

הסבר המעברים: השיוויון הראשון נובע מחוק האסוציאטיביות. השיוויון השני זה חוק הפילוג. השיוויון השלישי נובע מכך שחיתוך של קבוצה עם המשלים שלה זו הקבוצה הריקה. השיוויון הרביעי אומר שאיחוד עם הקבוצה הריקה לא משפיע. השיוויון החמישי זה שוב חוק האסוציאטיביות, השיוויון השישי כשלישי והשיוויון השביעי נובע מכך שחיתוך עם הקבוצה הריקה הוא ריק.

ב. הוכחה: $x\in(\cap_{i\in I}A_i)^c\iff\neg(x\in\cap_{i\in I}A_i)\iff\neg(\forall i\in I:x\in A_i)\iff\exists i\in I:x\notin A_{\mathrm{i}}\iff x\in\cup_{i\in I}A_i^c$.

ג. הוכחה: $x\in(\cup_{i\in I}A_i)^c\iff\neg(x\in\cup_{i\in I}A_i)\iff\neg(\exists i\in I:x\in A_i)\iff\forall i\in I:x\notin A_i\iff x\in\cap_{i\in I}A_i^c$.

2. תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו:
א. $A\subseteq B\iff P(A)\subseteq P(B)$
ב. $A\cap B=\phi\iff P(A)\cap P(B)=\{\phi\}$
פתרון:

א. $\Leftarrow$: נניח $P(A)\subseteq P(B)$, ויהי $a\in A$, אזי $\{a\}\in P(A)$ וכיון ש־ $P(A)\subseteq P(B)$ נובע ש־ $\{a\}\in P(B)$, ולכן $a\in B$.

$\Rightarrow$: נניח $A\subseteq B$, ויהי $X\in P(A)$, לכן $X\subseteq A$, וכיון ש־ $A\subseteq B$ נובע ש־ $X\subseteq B$, ולכן $X\in P(B)$

ב. $\Leftarrow$: נניח $P(A)\cap P(B)=\{\phi\}$, ונניח בשלילה שקיים $x\in A\cap B$, אזי $\phi\neq\{x\}\in P(A)\cap P(B)$ בסתירה. לכן $A\cap B=\phi$.

$\Rightarrow$: נניח $A\cap B=\phi$. נשים לב שלכל קבוצה X מתקיים ש־ $\phi\in P(X)$, ולכן ברור ש־ $\{\phi\}\subseteq P(A)\cap P(B)$, ונותר להוכיח את ההכלה השניה. יהי $X\in P(A)\cap P(B)$, אזי $X\subseteq A\wedge X\subseteq B$, ולכן $X\subseteq A\cap B=\phi$ ולכן $X=\phi$.

3. הוכיחו או הפריכו:
א. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

ב. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

ג. $P(A\setminus B)=P(A)\setminus P(B)$.

ד. $P(A\triangle B)=P(A)\triangle P(B)$.

ה. תהי U הקבוצה האוניברסלית אזי: $P(A^c)=(P(A))^c$.

פתרון:

א. הוכחה: $X\in P(A)\cap P(B)$ אמ"ם $X\subseteq A\wedge X\subseteq B$ אמ"ם $X\subseteq A\cap B$ אמ"ם $X\in P(A\cap B)$.

ב. הפרכה: $A=\{1\},B=\{2\}$ אזי $P(A)\cup P(B)=\{\phi,\{1\}\}\cup\{\phi\{2\}\}=\{\phi,\{1\},\{2\}\}\neq\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}=P(\{1,2\})=P(A\cup B)$.

ג. לכל שתי קבוצות שוות $A=B$ נקבל ש־ $P(A)=P(B)$ ולכן $P(A)\setminus P(B)=\phi$ אבל $P(A\setminus B)=P(\phi)=\{\phi\}\neq\phi$. תבחרו איזה קבוצות שוות שאתם רוצים וזו תהיה ההפרכה...

ד. גם כאן קבוצות שוות יהוו הפרכה כי הפרש סימטרי של קבוצות שוות זה הקבוצה הריקה.