לינארית 1 (88112), סמטסטר קיץ תשפ,מועד ב'-פתרון

מרצים: מר אחיה בר-און, מר בארי גרינפלד, ד"ר אליהו מצרי, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: ניקול בלשוב, אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, יפעת חדד, נועה כהן, גלעד פורת-קורן, זהבה צבי, אושרית שטוסל.

אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 6 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 106. ציון מעל 100 יעוגל ל 100 (חלק א 70 נקודות וחלק ב 36 נקודות)
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

חלק א

1. תהא

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

מטריצה. ונקל על החישובים ונספר לכם ש:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיס ל $N(A)$

פתרון: נדרג את A לצורה קנונית

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ונקבל שיש משתנה חופשי אחד (הרביעי) שנצבי בו פרמטר t ונקבל

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $N(A)$.

(ב) השלימו את הבסיס מהסעיף הקודם לבסיס של $N(A^3)$.

פתרון: נשים לב כי $N(A) \subseteq N(A^3)$ (מכיוון שאם $v \in N(A)$ אז $Av = 0$ ולכן $A^3v = A^2Av = 0$ ולכן $v \in N(A)$) ולכן יש משמעות לשאלה. כעת נמצא בסיס ל $N(A^3)$. נדרג את A^3

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ויש 3 משתנים חופשיים (השני, השלישי והרביעי) שנציב בהם פרמטרים t_1, t_2, t_3 ונקבל

$$N(A^3) = \left\{\begin{pmatrix}t_3 - t_2 + t_1\\t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix} \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ו $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $N(A^3)$ שמרחיב את הבסיס מסעיף קודם.

(ג) מצאו בסיס ל $C(A^3) + C(A)$.

פתרון: טענה $C(A^3) \subseteq C(A)$ הוכחה: יהא $y \in C(A^3)$ אזי קיים x כך ש $y = A^3x$ ולכן

$$y = A^3x = A\left(A^2x\right) \in C(A)$$

כנדרש. כעת, לפי תכונת סכום מרחבים והטענה ממקודם נקבל כי

$$C(A) \subseteq C(A^3) + C(A) \subseteq C(A) + C(A) = C(A)$$

ולכן קיים שיוויון $C(A^3) + C(A) = C(A)$. נמצא בסיס ל $C(A)$. נשתמש בדירוג מסעיף א

$$A = \begin{pmatrix}-1&2&1&1\\2&-2&3&-2\\-1&1&-1&1\\-4&5&-3&4\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ומכיוון שיש איבר מובילים בעמודות $1, 2, 3$ בצורה מדורגת של A נקבל שעמודות $1, 2, 3$ דהיינו $\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\}$ מהווים בסיס ל $C(A)$.

(ד) מצאו וקטור ב $C(A)$ שאינו שייך ל $C(A^2)$.

פתרון: ישירות מהגדרה נקבל ש

$$C(A^2) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

ומכיוון ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל הם מהווים בסיס ל $C(A^2)$. נמצא וקטור ב $C(A)$ שלא נמצא ב $C(A^2)$. כיוון שלכל צ"ל של $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ יהיה מהצורה $\begin{pmatrix}*\\*\\0\\*\end{pmatrix}$ (כי לשני הוקטורים יש 0 במיקום $3,1$) נקבל שכל עמודה של A שאין בה 0 במיקום $3,1$ תהיה ב $C(A)$ אך לא ב $C(A^3)$. במקרה שלנו, כל עמודה של A תהיה תשובה.

2. תהא

$$A=\begin{pmatrix}-4&0&a+2\\6a-4&2-a&4-6a\\-2a-4&0&3a+2\end{pmatrix}$$

מטריצה ממשית מגודל 3×3 ויהיו

$$b_1=\begin{pmatrix}a+3\\a-3\\a+5\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}2a-4\\6-a\\3a-5\end{pmatrix}$$

שני וקטורי עמודה ממשיים מגודל 3×1.

(א) מצאו לאילו ערכי a למערכת $A^3x=b_1$ אין פתרון יחיד (כלומר מתי יש אינסוף פתרונות או שאין פתרון כלל).
פתרון: כיוון ש A ריבועית נקבל ש A הפיכה אמ"מ A^3 הפיכה אמ"מ למערכת $A^3x=b_1$ יש פתרון יחיד.
ולכן השאלה שלנו שקולה ל: לאילו ערכי a, המטריצה A אינה הפיכה. כיוון ש A אינה הפיכה אמ"מ $\det A=0$, נחשב את $\det A$ ונבדוק מתי יש שיוויון ל 0. נפתח לפי עמודה שניה:

$$\begin{aligned}\det A&=\left|\begin{pmatrix}-4&0&a+2\\6a-4&2-a&4-6a\\-2a-4&0&3a+2\end{pmatrix}\right|\\&=-0\cdot|M_{1,2}|+(2-a)\left|\begin{pmatrix}-4&a+2\\-2a-4&3a+2\end{pmatrix}\right|-0\,|M_{3,2}|\\&=(2-a)\cdot(-4\,(3a+2)-(-2a-4)\,(a+2))\\&=(2-a)\cdot\left(-12a-8-\left(-2a^2-8a-8\right)\right)\\&=(2-a)\cdot\left(-2a^2-4a\right)\\&=-2a\,(2-a)\,(a-2)\end{aligned}$$

ולכן $\det A=0$ אמ"מ $a=0$ או $a=2$.

(ב) מצאו לאילו ערכי a למערכת $A^2x=b_2$ אין פתרון.
פתרון: כמו בסעיף א נקבל שלמערכת $A^2x=b_2$ אין פתרון יחיד אמ"מ $a=0$ או $a=2$. ולכן אילו שני הערכים שצריך לבדוק פה:
עבור $a=0$ נקבל ש

$$A^2=\begin{pmatrix}-4&0&2\\-4&2&4\\-4&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0&2\\-4&2&4\\-4&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&-4\\-8&4&8\\8&0&-4\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}-4\\6\\-5\end{pmatrix}$$

ואז נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}8&0&-4&-4\\-8&4&8&6\\8&0&-4&-5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}8&0&-4&-4\\0&4&4&2\\0&0&0&-1\end{array}\right)$$

שאין לה פתרון.

עבור $a=2$ נקבל ש

$$A^2=\begin{pmatrix}-4&0&4\\8&0&-8\\-8&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0&4\\8&0&-8\\-8&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&0&16\\32&0&-32\\-32&0&32\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$$

ואז נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-16&0&16&0\\32&0&-32&4\\-32&0&32&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-16&0&16&0\\0&0&0&4\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

וגם לה אין פתרון. לסיכום עבור $a=0$ או $a=2$ נקבל שלמערכת אין פתרון.

(ג) מצאו לאילו ערכי a למערכת $Ax=b_2$ יש אינסוף פתרונות.

פתרון: כמו בסעיף א נקבל שלמערכת $Ax=b_2$ אין פתרון יחיד אמ"מ $a=0$ או $a=2$. ולכן אילו שני הערכים שצריך לבדוק פה:

עבור $a=0$ נקבל ש

$$A=\begin{pmatrix}-4&0&2\\-4&2&4\\-4&0&2\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}-4\\6\\-5\end{pmatrix}$$

ואז נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-4&0&2&-4\\-4&2&4&6\\-4&0&2&-5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-4&0&2&-4\\0&2&2&10\\0&0&0&-1\end{array}\right)$$

שאין לה פתרון.

עבור $a=2$ נקבל ש

$$A=\begin{pmatrix}-4&0&4\\8&0&-8\\-8&0&8\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$$

ואז נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-4&0&4&0\\8&0&-8&4\\-8&0&8&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-4&0&4&0\\0&0&0&4\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

וגם לה אין פתרון. לסיכום אין ערך של a עבורו יש אינסוף פתרונות.

3. תהא $A\in\mathbb{R}^{2\times 3}$ מטריצה ויהיו

$$E_1=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$$

מטריצות אלמנטריות. נתון כי מתקיים

$$E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&4&0\end{pmatrix}$$

(א) מצאו את A.

פתרון: כיוון ש E_1,E_2,E_3 מטריצות אלמנטריות הם בפרט הפיכות ומתקיים $E_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0\\0&1\end{pmatrix},E_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix},E_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ (המטריצות האלמנטריות שמקודדות את הפעולות ההפוכות). כעת מהשיוויון

$$E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&4&0\end{pmatrix}$$

נקבל, ע"י הכפלה $E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$, כי

$$\begin{aligned} A &= E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כנדרש.

(ב) חשבו את המימד של $R\left(A^tE_3^{-1}\right)$

פתרון: כיוון ש E_1, E_2, E_3 מטריצות אלמנטריות הם בפרט הפיכות, מתקיים ש $\text{rank}E_3E_2E_1A = \text{rank}A$ (כיוון שכפל במטריצה הפיכה לא משנה דרגה) וכמובן ש

$$\text{rank}E_3E_2E_1A = \text{rank}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

כיוון ששתי השורות של $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ בת"ל (אחת לא כפולה של השניה). כעת $\dim R\left(A^tE_3^{-1}\right) = \text{rank}\left(A^tE_3^{-1}\right) = \text{rank}A^t = \text{rank}A = 2$ כנדרש.

4. תהא $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, המקיימת כי $[T]_C^B = I$ כאשר

$$\begin{aligned} B &= \left\{-1+2x, -2x-x^2, 1+x+x^2\right\} \\ C &= \left\{x, 1-5x-x^2, -2+6x+x^2\right\} \end{aligned}$$

שני בסיסים (סדורים) של $\mathbb{R}_2[x]$ ו I היא מטריצת היחידה מגודל 3×3)

(א) חשבו את $T\left(-2+6x+x^2\right)$.

פתרון: מהגדרת המטריצה המייצגת $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [T]_C^B$ נסיק כי

$$\begin{aligned} T(-1+2x) &= x \\ T(-2x-x^2) &= 1-5x-x^2 \\ T(1+x+x^2) &= -2+6x+x^2 \end{aligned}$$

וכעת, מה שנשאר הוא להציג את $-2+6x+x^2$ כצ"ל של איברי B. נשתמש בוקטורי יצוג לפי הבסיס הסטנדרטי ונפתור את המערכת המתאימה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר, גילינו ש

$$-2+6x+x^2 = 2(-1+2x) - \left(-2x-x^2\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned} T\left(-2+6x+x^2\right) &= 2T(-1+2x) - T\left(-2x-x^2\right) \\ &= 2x - \left(1-5x-x^2\right) \\ &= -1+7x+x^2 \end{aligned}$$

(ב) חשבו את $T^{-1}\left(1+2x+3x^2\right)$

פתרון: מכך ש T הפיכה, נוכל להשתמש במשפט לקבל ש

$$[T^{-1}]_B^C = \left([T]_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נסיק כי

$$\begin{aligned} T^{-1}(x) &= -1+2x \\ T(1-5x-x^2) &= -2x-x^2 \\ T(-2+6x+x^2) &= 1+x+x^2 \end{aligned}$$

וכעת, מה שנשאר הוא להציג את $1+2x+3x^2$ כצ"ל של איברי C. נשתמש בוקטורי יצוג לפי הבסיס הסטנדרטי ונפתור את המערכת המתאימה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

כלומר, גילינו ש

$$1+2x+3x^2 = -9\left(x\right) - 7\left(1-5x-x^2\right) - 4\left(-2+6x+x^2\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned} T^{-1}\left(1+2x+3x^2\right) &= -9T^{-1}\left(x\right) - 7T^{-1}\left(1-5x-x^2\right) - 4T^{-1}\left(-2+6x+x^2\right) \\ &= -9\left(-1+2x\right) - 7\left(-2x-x^2\right) - 4\left(1+x+x^2\right) \\ &= 5-8x+3x^2 \end{aligned}$$

(ג) נתונה העתקה $S:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע" משפט ההגדרה כך:

$$\begin{aligned} S(1-5x-x^2) &= -2x-x^2 \\ S(-2+6x+x^2) &= -1+2x \\ S(x) &= 3-8x-x^2 \end{aligned}$$

מצאו בסיס D (של $\mathbb{R}_2[x]$) כך שבמטריצה מהייצגת $[S]_D^D$ יש עמודת אפסים ויש שורת אפסים.

פתרון: נתחיל בחישוב $[S]_E^C$ כאשר $E=\left\{1,x,x^2\right\}$ הבסיס הסטנדרטי. לפי הגדרה

$$[S]_E^C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -8 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

וכעת נוכל למצוא את הגרעין והתמונה של S ע"י דירוג המטריצה

$$[S]_E^C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -8 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

- יש משתנה חופשי (השלישי) שנציב בו פרמטר t ונקבל כי

$$[\ker S]_C = N([S]_E^C) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t \\ -\frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\ker S &= \text{span}\left\{1\cdot(x)-1\cdot\left(1-5x-x^2\right)+3\cdot\left(-2+6x+x^2\right)\right\}\\ &= \text{span}\left\{-7+24x+4x^2\right\}\end{aligned}$$

ו $\left\{-7+24x+4x^2\right\}$ בסיס ל $\ker S$

– יש שני איברים מובילים בעמודות $1,2$ ולכן עמודות אלו הם בסיס למרחב העמודות $C([S]_E^C)$ ולכן

$$[\text{Im}S]_E = C([S]_E^C) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\-8\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\text{Im}S = \text{span}\left\{3-8x-x^2,-2x-x^2\right\}$$

ו $\left\{3-8x-x^2,-2x-x^2\right\}$בסיס לתמונה של S.

כעת נגדיר $D=\left\{-7+24x+4x^2,3-8x-x^2,-2x-x^2\right\}$. טענה: D בסיס. הוכחה: לפי השלישי חינם מספיק להראות שהפולינומים ב D בת"ל. נתשמש בוקטורי קורדינאטות לפי הבסיס הסטנדרטי. נשים את הוקטורים הקורדינטאות במטריצה ונבדוק שהדטרמיננטה שלה שונה מאפס (כיוון שזאת מטריצה ריבועית מתקיים שהיא הפיכה אמ"מ העמודות שלה בת"ל. שזה שקול לכך שהדטרמיננטה שונה מאפס). נבדוק זאת

$$\left|\begin{pmatrix}-7&3&0\\24&-8&-2\\4&-1&-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-7&3&0\\16&-6&0\\4&-1&-1\end{pmatrix}\right| = -1\cdot\left|\begin{pmatrix}-7&3\\16&-6\end{pmatrix}\right| = -(42-48)\neq 0$$

וכעת נוכל לחשב את $[S]_D^D$. כיוון ש $\left\{3-8x-x^2,-2x-x^2\right\}$ בסיס לתמונה של S נקבל שעבור כל פולינום $p(x)$ מתקיים ש $S\left(p(x)\right)$ הוא צ"ל של $\left\{3-8x-x^2,-2x-x^2\right\}$ ובפרט עבור הפולינומים ב D. בנוסף $-7+24x+4x^2\in\ker S$. בסה"כ נוכל להסיק שהמטריצה המייצגת $[S]_D^D$ היא מהצורה

$$[S]_D^D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&*&*\\0&*&*\end{pmatrix}$$

(כאשר הכוכביות אלו המקדמים בצ"ל של $S(3-8x-x^2),S(-2x-x^2)$ שניתן להציג כצ"ל של $3-8x-x^2,-2x-x^2$ כאמור לעיל.)

(ד) עבור העתקה S מהסעיף הקודם, מצאו בסיס ל $\ker TS$ (הגרעין של TS).

פתרון: טענה: $\ker S=\ker TS$. הוכחה: $(\supseteq)$ יהא $p\in\ker S$ ולכן $S(p)=0$ ולכן $T\left(S(p)\right)=0$ ולכן $p\in\ker TS$ $(\subseteq)$ יהא $p\in\ker TS$ ולכן $T\left(S(p)\right)=0$ ומכיוון ש T הפיכה (נתון שמטריצה מייצגת שלה היא Iשהפיכה), נוכל להרכיב ב T^{-1}את השיוון לקבל $S(p)=0$ ולכן $p\in\ker S$.

מסקנה: ראינו ש $\left\{-7+24x+4x^2\right\}$ בסיס ל $\ker S$ וזוהי התשובה גם לסעיף זה.

(ה) עבור העתקה S מהסעיף הקודם, מצאו בסיס ל $\text{Im}ST$ (התמונה של ST).

פתרון: טענה: $\text{Im}ST=\text{Im}S$. הוכחה: $(\supseteq)$ יהא $q\in\text{Im}S$ ולכן קיים פולינום p כך ש $S(p)=q$ ולכן, כיוון ש T הפיכה, נוכל להגדיר $\hat{p}=T^{-1}(p)$ ולקבל כי $ST(\hat{p})=STT^{-1}(p)=S(p)=q$ ולכן $q\in\text{Im}ST$ $(\subseteq)$ יהא $q\in\text{Im}ST$ ולכן קיים פולינום p כך ש $S\left(T(p)\right)=q$. נגדיר $\hat{p}=T(p)$ ונקבל כי $S(\hat{p})=q$ ולכן $q\in\text{Im}S$

מסקנה: ראינו ש $\left\{3-8x-x^2,-2x-x^2\right\}$בסיס לתמונה של S וזוהי התשובה גם לסעיף זה.

חלק ב

5. נגדיר $W=\left\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}\mid\sum_{j=1}^n C_j(A)=0\right\}$ קבוצת המטריצות שסכום כל העמודות שווה לעמודת אפסים.

(א) הוכיחו שזהו תת מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$ ומצאו את מימדו.

פתרון: נוכיח שזהו ת"מ ע"י הקריטריון המקוצר:

- וקטור האפס $0 \in W$: אכן מטריצת האפס $0 \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת כי $\sum_{j=1}^{n} 0_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$ $\sum_{j=1}^{n} C_i(0) =$ ולכן $0 \in W$
- סגירות לחיבור וכפל בסקלר: יהיו $A, B \in W$ ו α סקלר. צ"ל כי $\alpha A + B \in W$. מההנחה נקבל כי $\sum_{j=1}^{n} C_j(B) = \sum_{j=1}^{n} C_j(A) = 0$ ולכן

$$\sum_{j=1}^{n} C_j(\alpha A + B) = \sum_{j=1}^{n} [C_j(\alpha A) + C_j(B)] = \sum_{j=1}^{n} C_j(\alpha A) + \sum_{j=1}^{n} C_j(B) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha C_j(A) + \sum_{j=1}^{n} C_j(B) = \alpha \sum_{j=1}^{n} C_j(A) + \sum_{j=1}^{n} C_j(B) = \alpha 0 + 0 = 0$$

כנדרש.

כעת נוכיח כי $\dim W = n^2 - n$. לשם כך נגדיר $T : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^n$ ע"י $T(A) = \sum_{j=1}^{n} C_j(A)$. זוהי ה"ל (שהרי לכל $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ולכל סקלר α מתקיים כי

$$T(\alpha A + B) = \sum_{j=1}^{n} C_j(\alpha A + B) = \sum_{j=1}^{n} [C_j(\alpha A) + C_j(B)] = \alpha \sum_{j=1}^{n} C_j(A) + \sum_{j=1}^{n} C_j(B) = \alpha T(A) + T(B)$$

כמו החישובים שעשינו קודם) ומתקיים כי

$$\ker T = \left\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid T(A) = 0\right\} = \left\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid \sum_{j=1}^{n} C_j(A) = 0\right\} = W$$

ולכן לפי משפט הדרגה נקבל כי $\dim \ker T = \dim \mathbb{F}^{n\times n} - \dim \mathrm{Im} T$. נראה $\mathrm{Im} T = \mathbb{F}^n$ ונקבל כי

$$\dim \ker T = \dim \mathbb{F}^{n\times n} - \dim \mathrm{Im} \mathbb{F}^n = n^2 - n$$

כמו שאנחנו רוצים. טענה: $\mathrm{Im} T = \mathbb{F}^n$. אכן יהא $v \in \mathbb{F}^n$ ונגדיר $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ע"י

$$C_1(A) = v, C_2(A) = C_3(A) = \cdots = C_n(A) = 0$$

(מטריצה שכולה אפסים, פרט לעמודה הראשונה ששוה ל v) ואז

$$T(A) = \sum_{j=1}^{n} C_j(A) = v + 0 + 0 + \cdots + 0 = v$$

ולכן $v = T(A) \in \mathrm{Im} T$. זה מוכיח כי $\mathrm{Im} T \supseteq \mathbb{F}^n$. ההכלה השניה $\mathrm{Im} T \subseteq \mathbb{F}^n$ תמיד מתקיימת (תמיד התמונה של T מוכלת בטווח) ולכן יש את השיוויון הדרוש.

(ב) הוכיחו/הפריכו: לכל $A, B \in W$ גם $A \cdot B \in W$
פתרון: הוכחה: יהיו $A, B \in W$ ונוכיח כי $AB \in W$. אכן, לפי כפל עמודה מתקיים שלכל j מתקיים

$$C_j(AB) = AC_j(B)$$

ולכן, בצירוף תכונת הפילוג, נקבל ש

$$\sum_{j=1}^{n} C_j(AB) = \sum_{j=1}^{n} AC_j(B) = A\left(\sum_{j=1}^{n} C_j(B)\right) = A0 = 0$$

ולכן $AB \in W$ כנדרש (המעבר באמצע נובע מכך ש $B \in W$)

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל $A,B\in W$ מתקיים כי $\dim\left(N(A)\cap N(B)\right)\geq 1$

פתרון: הוכחה: תהא $A\in W$ ולכן $\sum_{j=1}^{n}C_j(A)=0$. נשים לב כי $\sum_{j=1}^{n}1\cdot C_j(A)=\sum_{j=1}^{n}C_j(A)$ ולכן, נגדיר $v=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ ונקבל לפי כפל עמודה ש

$$Av=\sum_{j=1}^{n}1\cdot C_j(A)=0$$

ולכן $0\neq v\in N(A)$. זה נכון לכל מטריצה $A\in W$ ובפרט לכל $A,B\in W$ מתקיים כי $v\in N(A)\cap N(B)$ ומכיוון ש $v\neq 0$ נקבל כי $\dim\left(N(A)\cap N(B)\right)\geq 1$ כמבוקש.

6. יהא V מ"ו ויהיו $v_1,\dots,v_n\in V$ ת"ל נסמן Q את קבוצת כל הוקטורים $v\in V$ המקיימים כי $v_1+v,\dots,v_n+v$ ת"ל.

(א) הוכיחו/הפריכו: מתקיים כי $Q\subseteq \text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$

פתרון: יהא $v\in\text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$ אזי לכל i מתקיים כי גם $v_i+v\in\text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$ ולכן $\left\{v_1+v,\dots,v_n+v\right\}\subseteq \text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$ היא קבוצה עם n איברים במרחב שמימדו קטן ממש מ n (שהרי $\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$ ת"ל ולכן $\dim\text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}<n$) ולכן הם ת"ל ומכאן ש $v\in Q$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: Q הינו ת"מ.

פתרון: הוכחה: יהא $v\in Q$ ונראה מתי $v\in\text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$. מהגדרת Q נקבל כי $v_1+v,\dots,v_n+v$ ת"ל ולכן קיים צ"ל לא טריוואלי

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(v_i+v\right)=0$$

(כלומר קיים j כך ש $\alpha_j\neq 0$). מכיוון ש $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(v_i+v\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv$ נקבל אחרי העברת אגף כי

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i=\left(-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)v$$

ואז נרצה לבחון האם $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$. בשביל זה נדייק יותר ונחלק האם קיים צ"ל לא טרייואלי של $v_1,\dots,v_n$ שמתאפס שמקדמי הצירוף מסתכמים לאפס (קיים צירוף כזה כי $v_1,\dots,v_n$ ת"ל השאלה היא האם קיים צ"ל כזה שמקדמיו מסתכמים לאפס):

- אם לא קיים כזה צ"ל אז $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ (כי אחרת $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ ונקבל כי

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i=\left(-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)v=0v=0$$

הוא צירוף לינארי של $v_1,\dots,v_n$ שמתאפס ומקדמי הצירוף מסתכמים לאפס.) ונוכל לחלק ב $-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ (נסמנו ב β) לקבל כי

$$v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\beta}v_i\in\text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$$

ולכן במקרה זה נקבל שכל $v\in Q$ מקיים ש $v\in\text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$ כלומר $Q\subseteq\text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$ ובצירוף הסעיף הקודם נקבל שיוויון $Q=\text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$.

- אם קיים כזה צירוף: כלומר, קיים צירוף לינארי לא טריוואלי $\sum_{i=1}^{n}\beta_iv_i=0$ כך ש $\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$. נקבל במקרה זה שלכל $v\in V$ מתקיים כי

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(v_i+v\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_iv_i+\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right)v=0+0v=0$$

ולכן כל $v\in V$ מקיים כי $v\in Q$ ולכן $Q=V$.

במידה ותבחרו להגיש את חלק ב לבדיקה, ייתכן שתוזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על חלק ב").

במידה ותבחרו לא להגיש את חלק ב לבדיקה, תקבלו עליה 14 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על חלק ב").