תרגול 11- פתרון נוסחאות נסיגה

<u>תרגיל</u>

בכמה דרכים ניתן לרצף שורה של n משבצות בעזרת משבצות ב5 צבעים שונים כך שאין רצף של 3 משבצות צהובות?

נסמן $T(n)=$ מס' הדרכים לרצף כך שורה של n משבצות.

נסתכל על המשבצות הראשונות ונפריד למקרים:

- אם המשבצת הראשונה לא צהובה (יש לך **4** אפשרויות)- אז מספיק למצור ריצוף תקין ל$n-1$ משבצות. ולכך יש $T(n-1)$ אפשרויות.
- אם המשבצת הראשונה צהובה והשנייה לא צהובה (שוב, יש לכך **4** אפשרויות)- מספיק למצוא ריצוף תקין ל$n-2$ משבצות ולכך יש $T(n-2)$ אפשרויות.
- אם 2 המשבצות הראשונות צהובות והשלישית לא צהובה (**4** אפשרויות)- נשאר לרצף $n-3$ משבצות, ואת זה ניתן לעשות ב$T(n-3)$ דרכים.

סה"כ: $T(n)=4T(n-1)+4T(n-2)+4T(n-3)$

נמצא תנאי התחלה: $\mathrm{T}(1)=5\ ,\ \mathrm{T}(2)=5^2\ ,\ T(3)=5^3-1$

פתרון נוסחאות נסיגה

<u>משפט</u>: תהי $f(n)=p_1f(n-1)+p_2f(n-2)+\cdots+p_rf(n-r)$ נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית מסדר r.
הפולינום $\varphi(t)=t^r-p_1t^{r-1}-p_2t^{r-2}-\cdots-p_r$ נקרא הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה f.
אם לפולינום האופייני $\varphi(t)$ יש r שורשים ממשיים <u>שונים</u> $x_1,\dots,x_r$ אזי הפתרון הכללי של נוסחת הנסיגה הוא מהצורה $f(n)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,x_i^n=\alpha_1x_1^n+\alpha_2x_2^n+\cdots+\alpha_rx_r^n$, כאשר $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ הם מספרים ממשיים שניתן למצוא בעזרת תנאי ההתחלה.

<u>דוגמה</u>: פתור את נוסחת הנסיגה הבאה: $f(0)=1, f(1)=1, \forall n\geq 2: f(n)=f(n-1)+2f(n-2)$.

<u>פתרון</u>:

$r=2$ ולכן הנוסחה המפורשת תהיה מהצורה $f(n)=\alpha_1{x_1}^n+\alpha_2{x_2}^n$.
מהגדרת $f(n)$ נקבל ש $p_1=1, p_2=2$, לכן הפולינום האופייני הוא $\varphi(t)=t^2-t-2$.
שורשי הפולינום האופייני הם $x_1=2, x_2=-1$, כלומר $f(n)=\alpha_1 2^n+\alpha_2(-1)^n$.
כעת נציב את תנאי ההתחלה:

$$f(0)=\alpha_1 2^0+\alpha_2(-1)^0=\alpha_1+\alpha_2=1$$
$$f(1)=\alpha_1 2^1+\alpha_2(-1)^1=2\alpha_1-\alpha_2=1$$

נקבל ש $\alpha_1=\frac{2}{3}$ ו $\alpha_2=\frac{1}{3}$, כלומר $f(n)=\frac{2}{3}2^n+\frac{1}{3}(-1)^n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$.

<u>תרגיל</u>

פתור את נוסחת הנסיגה $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 14$

הפולינום האופייני: $\varphi(\mathrm{t}) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$

יש לנו שורש אחד ברור $x_1 = 1$ ואז קל למצוא שלפולינום יש פירוק:

$\varphi(\mathrm{t}) = (\mathrm{t}-1)(\mathrm{t}^2+5\mathrm{t}+6)$ ולכן שאר השורשים הם $x_2 = 2, x_3 = 3$

ונקבל ש- $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n$

נציב את תנאי ההתחלה:

$\begin{cases} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 \\ a_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 7 \\ a_3 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 15 \end{cases}$ נפתור ונקבל: $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$

וסה"כ: $a_n = 2 + 2^n + 3^n$

<u>תרגיל</u>

לפולינום האופייני $t^2 - 2t + 2$ יש שורשים מרוכבים $1 \pm i = \sqrt{2}\, cis(\pm\frac{\pi}{4})$

ולכן פיתרון כללי הוא: $a_n = A(1+i)^n + B(1-i)^n$

נציב את תנאי ההתחלה: $\begin{cases} A + B = 1 \\ \mathrm{A}(1+\mathrm{i}) + \mathrm{B}(1-\mathrm{i}) = 1 \end{cases}$ נקבל $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \frac{1}{2}$

והפתרון הוא: $a_n = \frac{1}{2}(1+i)^n + \frac{1}{2}(1-i)^n$

אם נעבור להצגה קוטבית/פולרית: $1 \pm i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4})$

מ דה-מואבר נקבל:

$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{2}^n\cos(n\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}^n\sin(n\frac{\pi}{4})i + \frac{1}{2}\sqrt{2}^n\cos(n\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}\sqrt{2}^n\sin(n\frac{\pi}{4})i = \sqrt{2}^n\cos(n\frac{\pi}{4})$

אפשר היה גם לעבור לפולאריות עוד בפתרון הכללי ולקבל:

באופן כללי :

שימו לב שכאשר מס' מרוכב הוא שורש של פולינום אז גם הצמוד שלו הוא שורש. ולכן אם יוצא לנו שורשים $a \pm bi$ אז יש לנו 2 צורות להציג את הנוסחא הסגורה:

1. $\alpha_1(\mathrm{a}+\mathrm{bi})^\mathrm{n} + \alpha_2(\mathrm{a}-\mathrm{bi})^\mathrm{n}$

2. עוברים לצורה פולארית $a+bi=re^{\theta i}$ ואז $\alpha_1 r^n\cos(n\theta)+\alpha_2 r^n\sin(n\theta)$

<u>למתעניינים</u>- קצת הסבר על מה קורה פה

יש לנו נוסחא רקורסיבית $a_n = ma_{n-1}+na_{n-2}$

אנחנו מנחשים (ניחוש מושכל) שיש לנו פתרון מהצורה $a_n=t^n$

נציב אותו בנוסחא ונקבל: $t^n=mt^{n-1}+nt^{n-2}$ נחלק ב t^{n-2} ונעביר אגפים ונקבל:

$t^2-mt-n=0$ -זהו הפולינום האופיני! פותרים אותו ומקבלים 2 אפשרויות ל-t

נניח קיבלנו 2 שורשים שונים x_1,x_2. זה אומר בעצם ש x_1^n,x_2^n הם פתרונות לa_n

ואז קורה נס ויוצא שהם בסיס לינארי של מרחב הפתרונות. מה שאומר שכל פתרון הוא צירוף לינארי שלהם. דהיינו הפתרון הכללי הוא: