(X,d) מרחב מטרי.

הגדרה

סדרה $\{x_n\}$ ב-X נקראת <u>סדרת קושי</u>(Cauchy) אם לכל $\epsilon > 0$, קיים $n - n(\epsilon)$ טבעי כך ש- $d(x_n, x_m) < \epsilon$ לכל $n, m > n(\epsilon)$.(אפשר לדרוש ב.ל.ג. שהתנאי יתקיים לכל $n > m > n(\epsilon)$.

למשל

כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.

באמת, אם $x_n \to x$, קיים $n'(\epsilon)$ טבעי כך ש- $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ עבור $n > n'(\epsilon)$. ולכן $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon$ כאשר $n, m > n'(\epsilon)$.

אבל ההפך בד"כ לא נכון

לדוגמה $X = (0,1]$, $x_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} \subseteq X$. $x_n \to 0$ ב-$\mathbb{R}$, ולכן היא קושי ב-$\mathbb{R}$. ז"א לכל $\epsilon > 0$, $|x_n - x_m| = d(x_n, x_m) < \epsilon$ כאשר $n, m > n(\epsilon)$ ולכן גם קושי ב-X(שהוא תת קבוצה של $\mathbb{R}$ עם אותה מטריקה d). אולם, $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב-X, כי גבולה(ב-$\mathbb{R}$), הנקבע באופן יחיד(!), הוא 0, ו-$0 \notin X$.

הגדרה

אם (X,d) מ"מ שבו <u>כל</u> סדרת קושי מתכנסת(ב-X), נאמר ש-X שלם(complete)

הערה

אם X מ"מ שלם, אזי כל תת-קבוצה <u>סגורה</u> F של X ג"כ מ"מ שלם.

באמת, אם $\{x_n\}$ סדרת קושי ב-F, היא גם ס"ק ב-X, ולכן כיוון ש-X <u>שלם</u>, היא מתכנסת ב-X, ו-$x_n \to x \in X$.

אם טווח הסדרה סופי - הסדרה קבועה החל מאינדקס מסויים והלאה, ולכן x הוא אחד מערכי הסדרה, ושייך לכן ל-F.

ועל כן $\{x_n\}$ מתכנסת ב-F.

אם טווח הסדרה הוא אין-סופי, הגבול x הוא נק' גבול של F, וכיוון ש-F סגורה, נקודת הגבול x שייכת ל-F(משפט!). ז"א $\{x_n\}$ מתכנסת ב-F.

הערה

במקרה הפרטי ש-X הוא <u>מרחב נורמי</u>, קוראים ל<u>מרחב נורמי שלם</u> <u>מרחב בנך</u>(Banach) (דהיינו: כל סדרת קושי במרחב בנך מתכנסת). תנאי קושי $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ עבור $n > m > n(\epsilon)$.

תכונות של סדרות קושי

1. כל סדרת קושי היא חסומה.

הוכחה: תהי $\{x_n\}$ סדרת קושי. ניקח $\epsilon = 1$ בהגדרה. קיים לכן $n(1)$ טבעי כך ש$d(x_n, x_m) < 1$ עבור כל $n > m > n(1)$. נקבע $m > n(1)$.

$$d(x_n, x_m) \begin{cases} < 1 & n > n(1) \\ \max_{1 \le n \le (1)} d(x_n, x_m) & n \le n(1) \end{cases} < 2 + \max(\cdots) \doteqdot R$$

קיבלנו $\{x_n\} \subseteq B(x_m, R)$
(במיוחד: כל סדרה מתכנסת היא חסומה).

2. אם $\{x_n\}$ סדרת קושי שיש לה תת-סדרה מתכנסת, אזי $\{x_n\}$ מתכנסת (לגבול של הסדרה חלקית)

הוכחה: לפי הנתון ש$\{x_n\}$ סדרת קושי, אם ϵ מספר נתון, קיים $n(\epsilon)$ טבעי כך ש> $d(x_n, x_m)$ ϵ כאשר $n > m > n(\epsilon)$.
נתון שיש תת סדרה $\{x_{n_j}\}$ שמתכנסת (לx). ז"א קיים $j\{\epsilon\}$ טבעי בך ש> $d(x_{n_j}, x)$ ϵ כאשר $j > j(\epsilon)$

$$n^*(\epsilon) = \max\left[n\left(\frac{\epsilon}{2}\right), j\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right]$$

<u>לכל</u> $n > n^*(\epsilon)$,

$$d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x)$$

נבחר מתווך j, $j > j\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$. אזי

$$n_j \ge j > j\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \ge n\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

$$n \ge n^*(\epsilon) \ge n\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

$$d(x_{n_j}, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$d(x_n, x_{n_j})$$

$\Leftarrow$ $d(x_n, x) < \epsilon$ לכל $n > n^*(\epsilon)$ $\Leftarrow$ $x_n \to x$.

תוצאה

המרחב $\mathbb{R}^k$ הוא מרחב בנך. דהיינו הוא מרחב נורמי שלם.

הוכחה

צריך להוכיח את השלמות של $\mathbb{R}^k$. תהי $\{x^n\}$ סדרת קושי כלשהי ב-$\mathbb{R}^k$. לפי (1) הסדרה חסומה. לכן יש לה תת סדרה מתכנסת(ראה משפט). לפי (2), $\{x^n\}$ עצמה מתכנסת. מש"ל.

אם X מרחב מטרי שלם, ו-$F \subseteq X$ סגורה, הרי גם F מ|מ שלם.

למשל $\bar{B}(a,R) = \{x \in X | d(x,a) \leq R\}$ הוא מ"מ שלם(כאשר X מ"מ שלם).

למשל, אם X מרחב בנך, אזי $\bar{B}(0,R) = \{x \in X | \|x\| \leq R\}$ מ"מ שלם. למשל $\bar{B}(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^k \big| \|x\| \leq R\}$מ"מ שלם.

פונקציות

תזכורת מונחים מתורת הקבוצות

- X, Y קבוצות לא ריקות. פונקציה(או "העתקה") מ-X ל-Y(סימון $f: X \to Y$) היא התאמה של אבר יחיד $f(x) \in Y$ לכל $x \in X$ נתון.
- X: תחום ההגדרה של הפונקציה.
- $E \subseteq X$, $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$ - התמונה של E ע"י f.
- במיוחד $f(X)$ נקרא הטווח של f(range)
- f חח"ע(injective) אם $f(x) = f(x') \Leftarrow x = x'$
- f על(surjective) אם $f(X) = Y$
- f נקראת חח"ע ועל(bijective) אם שני התנאים הנ"ל מתקיימים גם יחד.
- במקרה זה, כל $y \in Y$ הוא מהצורה $y = f(x)$ עבור $x \in X$ מתאים(כי f היא על) ו-x זה יחיד(כי f חח"ע). כלומר הגדרנו $g: Y \to X$ כך ש-$x = g(y)$ אמ"ם $y = f(x)$. g זו נקראת הפונקציה ההפוכה של f.
- אם $B \subseteq Y$, נסמן $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$. שם - התמונהה הפוכה של B ע"י f.
- $\begin{matrix} f: X \to Y \\ g: Y \to Z \end{matrix}$, X, Y, Z קבוצות $\emptyset \neq$ הפונקציה המורכבת:

$$h \doteqdot g \circ f : X \to Z$$

$$h(x) = g(f(x)) \, \forall x \in X$$

למשל: אם $f: X \to Y$ חח"ע ועל, $g: Y \to X$ הפונקציה ההפכוה, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$. כלומר $g \circ f$ היא פונקציה הזהותית ב-X.

תכונות

א) של התמונה ההפוכה

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}\left(A_{\alpha}\right)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}\left(A_{\alpha}\right)$$

$$f^{-1}\left(A^{c}\right) = \left[f^{-1}\left(A\right)\right]^{c}$$

ב) של התמונה

$$f\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f\left(A_{\alpha}\right)$$

$$f\left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}\right) \subseteq \bigcap_{\alpha} f\left(A_{\alpha}\right)$$

$f\left(A^{c}\right) \subseteq \left[f\left(A\right)\right]^{c}$ אם f חח"ע. $\left[f\left(A\right)\right]^{C} \subseteq f\left(A^{C}\right)$ אם f על. ולכן $\left[f\left(A\right)\right]^{C} = f\left(A^{C}\right)$ אם f היא חח"ע וכל.

גבול של פונקציה

יהיו X,Y מרחבים מטריים. $E \subseteq X$. $f : E \to Y$. פונקציה. תהי p נקודת גבול של E.
נאמר ש$\lim_{x\to p} f\left(x\right)$ קיים ושווה לq ($\in Y$) אם לכל $\epsilon > 0$, קיים $\delta = \delta\left(\epsilon\right) > 0$ כך ש$d\left(f\left(x\right), q\right) < \epsilon$ כאשר $d\left(x,p\right) < \delta$, $x \in E$.

יחידות: $d\left(q,q'\right) \le d\left(q, f\left(x\right)\right) + d\left(f\left(x\right), q'\right) < \epsilon$

כותבים: $\lim_{x\to p} f\left(x\right) = q$ או $f\left(x\right) \to q$ כאשר $x \to p$.