

אלגברה לינארית 2 (88113) – תשובות לבחינה (מועד א')

מרצים: פרופ' רון עדין, פרופ' בוריס קוניאבסקי.
מתרגלים: עופר בוסאני, שירה גילת, עדי לוגסי, תמר נחשוני.

מהצחה!

פרק א'

1.

- א. (טעות דפוס בשאלון בסעיף זה: במקום T צ"ל W .)
 ב. $W_4 = \{(v, -v) \mid v \in V\}$, $W_3 = \{(0, v) \mid v \in V\}$.
 ג. בא"נ עבור W_1 : $\{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0)\}$.
 בא"נ עבור W_2 : $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1, e_1), \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n, e_n) \right\}$.
 בא"נ עבור W_3 : $\{(0, e_1), \dots, (0, e_n)\}$.
 בא"נ עבור W_4 : $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1, -e_1), \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n, -e_n) \right\}$.
 ד. הטלה ניצבת של $(3v, 4v)$ על W_1 : $(3v, 0)$.
 הטלה ניצבת של $(3v, 4v)$ על W_2 : $\left(\frac{7}{2}v, \frac{7}{2}v \right)$.
 הטלה ניצבת של $(3v, 4v)$ על W_3 : $(0, 4v)$.
 הטלה ניצבת של $(3v, 4v)$ על W_4 : $\left(-\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}v \right)$.

2.

- א. בא"נ (סדור) עבור W : למשל $((e_1, 0), (e_2, 0), (e_3, 0), (0, e_1), (0, e_2), (0, e_3))$,
 כאשר $\{e_1, e_2, e_3\}$ הבא"נ הסטנדרטי של $V = \mathbb{C}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה המייצגת את T בבסיס זה:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. המטריצה המייצגת את T^* בבסיס הנייל:

$$T^*(v_1, v_2) = (v_2, -iv_1) \quad (\forall v_1, v_2 \in V)$$

האופרטור הצמוד:

ג. T נורמלי ואוניטרי.

ד. הפולינום האופייני: $(x^2 - i)^3$. הפולינום המינימלי: $x^2 - i$.

ה. T ניתן לשילוש וללכסון.

ו. T ניתן לשילוש אוניטרי וללכסון אוניטרי.

פרק ב'

3.

א. לא נכון. למשל $A = J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = J_2(0) \oplus J_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ב. נכון. ל- A יש ע"ע אפס (לא הפיכה) וגם ע"ע λ שונה מאפס (עקבה שונה מאפס), ואין ע"ע שלישי (לא ניתנת ללכסון). לכן הפ"א שלה הוא $x^2(x-\lambda)$ או $x(x-\lambda)^2$, ובכל מקרה ישנה צורת זיורדן לא-אלכסונית יחידה. לכן A, B דומות.
 ג. לא נכון. למשל $A = J_2(0) \oplus J_1(3)$, $B = J_2(0) \oplus J_1(4)$.

4.

א. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ a & 5 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$

ב. $a=0, b \neq 5$

ג. למשל $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5-b & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.

א.

ב. למשל $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}x, \frac{1}{\sqrt{6}}(3x^2 - 2) \right\}$

ג. $\frac{5}{3}$

ד. לא. עבור $f(x) = x(x-1)(x+1)$, למשל, $\langle f, f \rangle = 0$.