פתרון מבחן בתורת החבורות - מועד א'
תשפ"א

1) גרסה א': חשבו את הסדר של

$$Aut\left(\mathbb{Z}_7\times Aut\left(Aut(\mathbb{Z}_7)\right)\right).$$

פתרון: $Aut(\mathbb{Z}_n)\cong U_n$ חבורה אבלית מסדר $\varphi(n)$,
בפרט $Aut(\mathbb{Z}_7)$ אבלית מסדר $\varphi(7)=6$ ולכן
ממשפט המיון לחבורות אבליות סופיות:

$$Aut(\mathbb{Z}_7)\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\cong\mathbb{Z}_6$$

מכאן $Aut\left(Aut(\mathbb{Z}_7)\right)\cong Aut(\mathbb{Z}_6)\cong U_6$ מסדר $\varphi(6)=2$

ולכן

$$\mathbb{Z}_7\times Aut\left(Aut(\mathbb{Z}_7)\right)\cong\mathbb{Z}_7\times U_6\cong\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_{14}$$

משפט השאריות הסיני

ולכן סה"כ החבורה המבוקשת איזומורפית ל- $Aut(\mathbb{Z}_{14})\cong U_{14}$ שסדרה:

$$\varphi(14)=\varphi(2)\varphi(7)=\boxed{6}.$$

גרסה ב': חשבו את הסדר של

$$Aut\left(\mathbb{Z}_5\times Aut\left(Aut(\mathbb{Z}_9)\right)\right)$$

פתרון: $Aut(\mathbb{Z}_n)\cong U_n$ חבורה אבלית מסדר $\varphi(n)$,
בפרט $Aut(\mathbb{Z}_9)$ אבלית מסדר $\varphi(9)=6$ ולכן
ממשפט המיון לחבורות אבליות סופיות:

$$Aut(\mathbb{Z}_9) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$$

מכאן $Aut(Aut(\mathbb{Z}_9)) \cong Aut(\mathbb{Z}_6) \cong U_6$ מסדר $\varphi(6)=2$

ולכן $\mathbb{Z}_5 \times Aut(Aut(\mathbb{Z}_7)) \cong \mathbb{Z}_5 \times U_6 \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{10}$

משפט השאריות הסיני

ולכן

סה"כ החבורה המבוקשת איזומורפית ל- $Aut(\mathbb{Z}_{10}) \cong U_{10}$ שסדרה:

$$\varphi(10) = \varphi(2)\varphi(5) = \boxed{4}.$$

2 $H \le G$ מאינדקס p^2, נתון כי H פתירה.

הוכיחו כי $N_G(H)$ פתירה.

פתרון: H פתירה ולכן יש סדרה תת-נורמלית:

$$\{1\} \lhd H_k \lhd \cdots \lhd H_2 \lhd H_1 = H$$

שמנותיה H_i/H_{i+1} אבליות.

נרחיב לסדרה:

$$\{1\} \lhd H_k \lhd \cdots \lhd H_2 \lhd H_1 = H \lhd N_G(H)$$

ברור כי $H \lhd N_G(H)$ לפי הגדרת המנרמל.

כדי להראות ש- $N_G(H)$ פתירה מספיק אפוא להראות כי המנות בסדרה זו אבליות, ואכן המנה היחידה שנוספה היא:

$$N_G(H)/H$$

שסדרה מקיים, מכפליות האינדקס:

$$\left|N_G(H)/H\right| = [N_G(H):H] = \frac{[G:H]}{\ldots} \quad \Big| \quad [G:H] = p^2$$

$|\ /H| \qquad [G \qquad [G:N_G(H)]\ |$

חבורה מסדר 1 היא טריוויאלית ולכן אבלית;
חבורה מסדר p ציקלית ולכן אבלית;
חבורה מסדר p^2 אבלית (ראינו בהרצאה).

מכל מקום הסדרה התת-נורמלית שהצגנו עדיין בעלת מנות אבליות ועל כן $N_G(H)$ פתירה. מ.ש.ל.

③ ב. הראו כי $G\times H$ פועלת נאמנה על קבוצה בגודל $|G|+|H|$.

פתרון: $G \curvearrowright G$ בכפל משמאל, ולכן $G\times H \curvearrowright G$ דרך ההטלה $G\times H \twoheadrightarrow G$, בדומה, $G\times H \curvearrowright H$.

לסיכום $G\times H \curvearrowright \underbrace{G \sqcup H}_{\text{איחוד זר}}$:

$$(g,h)*x = \begin{cases} gx, & x\in G \\ hx, & x\in H \end{cases}$$

פעולה.

זוהי פעולה נאמנה שכן אם (g,h) בליבת הפעולה אזי בפרט:

$$e_G = (g,h)*e_G = ge_G = g$$
$$e_H = (g,h)*e_H = he_H = h$$

כלומר הליבה G טריוויאלית ולכן הפעולה נאמנה. מ.ש.ל.

ב. נתונה חבורה G מסדר 16 הפועלת נאמנה על 6 איברים. הוכיחו כי $G \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2$.

פתרון: ראשית נבחין כי:

$$D_4 \times \mathbb{Z}_2 \overset{\text{I}}{\hookrightarrow} S_4 \times \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\substack{\cong \\ S_2}} \overset{\text{II}}{\hookrightarrow} S_6$$

I שהרי D_4 פועלת נאמנה על קודקודי ריבוע.

II ראינו בהרצאה כי $S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$, לפי:

$$(\sigma, \pi) \longmapsto \sigma \circ \pi'$$

כאשר: $\pi'(n+i) = \pi(n)+i$.

כעת: $|D_4 \times \mathbb{Z}_2| = 16 = 2^4$, $|S_6| = 6! = 720 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

ולכן התמונה של $D_4 \times \mathbb{Z}_2$ תחת השיכון ב- S_6, שנסמנו φ, הינה ת"ח 2-סילו של S_6.

בנוסף, נתון כי G פועלת נאמנה על 6 איברים ולכן:

$$\psi: G \hookrightarrow S_6$$

אלא ש- $|G| = 2^4$ ולכן תמונתה תחת השיכון ψ היא גם ת"ח 2-סילו של S_6.

ממשפט סילו, כל ת"ח p-סילו של חבורה סופית נתונה צמודות זו לזו (לאחר p), ובפרט איזומורפיות.

ולכן

$$D_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong \psi(D_4 \times \mathbb{Z}_2) \cong \psi(G) \cong G$$

כנדרש

מ.ש.ל.

4

$$G \circlearrowright X$$
$$G \circlearrowright E = \{ f : X \to \mathbb{Z}_p \}$$
$$g * f(x) = f(g.x)$$

א. הוכיחו כי לכל $g \in G$ יש m_g כך ש- $|Fix_E(g)| = p^{m_g}$

פתרון:

צעד 1: נבחין כי פונקציה $f : X \to \mathbb{Z}_p$ היא נק' שבת של $g \in G$ אמ"מ היא קבועה על מסלולי $\langle g \rangle$ בפעולה על X, שהרי:

$$\forall x \in X,\ g * f(x) = f(x) \iff \forall x \in X,\ f(g.x) = f(x)$$

לפיכך יש p^m נק' שבת כאשר m מספר המסלולים בפעולת $\langle g \rangle$ על X (בוודאי $m \geq 1$).

צעד 2: נצייד את E במבנה של מ"ו מעל השדה $\mathbb{Z}_p$ באמצעות חיבור נקודתי של פונקציות וכפל נקודתי בסקלר.

אז: $Fix_E(g) \leq E$ תמ"ו לא טריויאלי - הוא מכיל את התמ"ו החד-ממדי של פונקציות קבועות.

לפיכך $Fix_E(g)$ מ"ו ממימד חיובי מעל $\mathbb{Z}_p$ ולכן:

$Fix_E(g) \cong \mathbb{Z}_p^m$ (... מ"ו מעל $\mathbb{Z}$

$\mathrm{Fix}_E(g) = \mathbb{Z}_p$

ובפרט $|\mathrm{Fix}_E(g)| = p^{m\geq 1}$, כנדרש. מ.ש.ל.

ב. נתון כי $p \nmid |G|$, הוכיחו כי מספר המסלולים בפעולת G על E מתחלק ב-p.

פתרון: לפי למת ספירת המסלולים, מספר המסלולים בפעולת G על E שנסמנו k מקיים:

$$k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}_E(g)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{סעיף א}}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} p^{m_g}$$

בפרט:

$$p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{שכן } m_g\geq 1 \text{ לכל } g\in G}}{\Big|} \sum_{g\in G} p^{m_g} = k\cdot|G|$$

אלא ש- $p\nmid|G|$ ולכן, היות שהוא ראשוני, $p \mid k$.

מ.ש.ל.