למדנו בהרצאה:

1. $Subset-Sum$ - יש סדרה של מספרים, וצריך לבדוק אם יש תת סדרה בסכום מסויים
2. בעיית תזמון - נתון אוסף של משימות, עם זמן התחלה שלפניו אסור להתחיל, זמן סיום שאחריו אסור לסיים, וכמה זמן זה לוקח באמת.

נתבונן בבעיה הבאה:
$PAR=\{X|$ אוסף מספרים שלמים שניתן לחלק לשתי תת-קבוצות שסכומן זהה $X\}$

דוגמאות:

$$\{\underline{5,7},\overline{2,5,5}\}\in PAR$$

$$\{5,7,4,10\}\notin PAR$$

האם הבעייה בP? האם היא NP-שלמה?

פתרון

למעשה, PAR היא מקרה פרטי של $Subset-Sum$ כאשר סכום היעד הוא חצי מהסכום הכולל. כלומר יש רדוקציה מPAR ל$Subset-Sum$ - $PAR\leq_p Subset-Sum$.

$\Leftarrow$ מזה ניתן להסיק $PAR\in NP$

טענה

אם יש רדוקציה $A\leq_p B$ וידוע ש$B\in NP$, גם $A\in NP$.

הוכחה

נראה אלגוריתם לא דטרמיניסטי פולינומי להכרעת A:

$D_A(x)$:

1. הפעל את הרדוקציה וקבל $y=f(x)$.
2. בעזרת אלגוריתם ההכרעה הל"ד עבור B, קבע האם $y\in B$ והחזר תשובה זו

שלב 1 לוקח $O(|X|^c)$ ושלב 2 לקוח $O\left(|y|^d\right)\leq O\left((|X|^c)^d\right)=O\left(|X|^{cd}\right)$

טענה

$PAR\in NPC$

הוכחה

נראה רדוקציה מ$Subset-Sum$
כלומר בהנתן (X,k) קלט ל$Subset-Sum$ נרצה לבנות Y קלת לPAR כך ש$(X,k)\in$
$Subset-Sum \Leftrightarrow Y\in PAR$

הרעיון

נרצה לבנות Y שיהיה דומה לX, ומצד שני שסכום איבריו יהיה $2k$.

הבניה

$Y\supseteq X$. נסמן $S=\sum\limits_{x\in X} x$. נוסיף איבר חדש $y=2k-S$.

מובן שהבנייה פולינומית. נוכיח נכונות:

$(\Rightarrow)$ קיימת בX תת-קבוצה X' שסכומה k. בפרט $X'\subseteq Y$. נסתכל על סכום כל שאר איברי Y. סכום זה הוא:

$$\sum_{x\in X\setminus X'} y=(S-k)+2k-S=k$$

כלומר $(X',Y\setminus X')$ הוא חלוקה של T $\Leftarrow$ $Y\in PAR$

$(\Leftarrow)$ נניח שיש חלוקה של Y לשתי תת קבוצות Y',Y'' שסכומן זהה(ושווה לk). נשים לב שיש רק איבר אחד ב$Y\setminus X$, ולכן בדיוק אחת מY',Y'' היא תת קבוצה של X וסכומה k. $\Leftarrow$ $(X,k)\in Subset-Sum$.

ואריאציה

בפתרון לבעיה הקודמת יכולנו לקבל $y<0$. מה לגבי הואריאציה
$PAR^+=\{X\big|$ הוא אוסף מס' טבעיים שניתן לחלק ל2 תת-קב' שסכומן זהה $X\}$

פתרון

ראשית, יש לנו רדוקציה $PAR^+\leq PAR$ $\Leftarrow$ $PAR^+\in NP$[1]
נרצה בנוסף $PAR\leq_p PAR^+$, כלומר בהינתן אוסף מס' שלמים X, נרצה לבנות אוסף מספרים טבעיים Y כך ש$X\in PAR \Leftrightarrow Y\in PAR^+$.

הבנייה

עבור כל $x\in X$, ניצור $y=|x|\in Y$. זמן: לינארי. נוכיח נכונות:

$(\Rightarrow)$ נניח שיש חלוקה של X לשתי תת קבוצות X',X'' שסכומן זהה. נגדיר 4 קבוצות:

1. $Y'_+=\{y\big|$ y נוצר מx חיובי ב$X'\}$
2. $Y'_-=\{y\big|$ y נוצר מx שלילי ב$X'\}$

[1] אם קיבלנו ברדוקציה מספר שלילי, נחזיר $\{1\}$, כי הקלט אוטומטית לא נכון בגלל הפורמט, אבל אנחנו לא יכולים להחזיר "שקר" כי זה רדוקציה ואנחנו חייבים להחזיר קלט שהוא אוסף.

3. $Y''_{+}=\{y \big| X''$ חיובי בx נוצר מ$y\}$

4. $Y''_{-}=\{y \big| X''$ שלילי בx נוצר מ$y\}$

מתקיים:

$$\sum_{y\in Y'_{+}} y-\sum_{y\in Y'_{-}} y=\sum_{x\in X'} x=\sum_{x\in X''} x=\sum_{y\in Y''_{+}} y-\sum_{y\in Y''_{-}}$$

$$\sum_{y\in Y'_{+}} y+\sum_{y\in Y''_{-}} y=\sum_{y\in Y''_{+}}\sum_{y\in Y'_{-}} \Leftarrow$$

כלומר יש חלוקה של Y: $\left(Y''_{+}\cup Y'_{-}\right),\left(Y'_{+}\cup Y''_{-}\right)$