

**אלגברה מופשטת 1 – תרגול 6**

**תרגיל:** תהא  $G$  חבורה סופית  $n = |G|$ , יהי  $k$  טבעי כך ש- $k/n$ . האם קיים בהכרח איבר מסדר  $k$  ב- $G$ ?

פתרון: לא. נביט ב- $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ . מתקיים כי  $|G|=16$  אבל אנחנו טוענים כי אין איבר ב- $G$  מסדר 8 (למשל).

למעשה, לכל  $(a,b) \in G$  מתקיים כי  $(a,b)^4 = (4a, 4b) = (0,0)$  ולכן  $0((a,b)) \leq 4$ . מ.ש.ל. ■

אגב, הראינו ש- $G$  אינה ציקלית (כי בשביל שהיא תהיה ציקלית, צריך איבר מסדר 16).

תת חבורה נורמלית (תח"נ)

הגדרה: תהא  $G$  חבורה  $H \leq G$  נקראת תח"נ אם  $\forall g \in G : gH = Hg$  ונסמן  $H \triangleleft G$ .

**משפט:** התנאים הבאים שקולים:

1.  $H \triangleleft G$  ;
2.  $\forall g \in G : gHg^{-1} = H$  ;
3.  $\forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H$  (פרוש:  $\forall g \in G \forall h \in H : ghg^{-1} \in H$ ).

דוגמאות:

1. בחבורה אבלית, כל ת"ח היא נורמלית.
2. בחבורה לא אבלית, זה לא בהכרח נכון. למשל,  $G = S_3$  ו- $H = \langle (12) \rangle = \{(12), id\}$  וראינו כי  $H \triangleleft G$ .
3.  $SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R})$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה,  $H \leq G$  אם  $[G:H]=2$  אזי  $H \triangleleft G$ .

הוכחה: נניח  $[G:H]=2$ . מכאן שקיימים שני קוסטים ימניים שונים,  $H, Ha_{a \notin H}$ . (שימו לב ש- $H = Ha$  או"א  $a$  שייך ל- $H$  ו- $Hx=Hy$  או"א  $xy^{-1} \in H$ ) כלומר,  $G = H \cup Ha$  איחוד זר.

כעת מתקיים  $aH \neq H$  ולכן  $aH$  איחוד זר  $G = H \cup aH$ . ומכאן  $aH = H \cup Ha = H \cup aH$  ולכן לכל  $a$  שלא שייך ל- $H$  מתקיים כי  $aH=Ha$ , אבל אם  $a$  שייך ל- $H$  ברור ש- $Ha=H=aH$  ולכן זה לכל  $a$ . מ.ש.ל. ■

**דוגמית לתרגיל:**  $|D_n| = 2n$  ראינו שעבור  $\sigma \in D_n$  (סיבוב) מתקיים  $o(\sigma) = n$  ולכן  $|\langle \sigma \rangle| = n$ . מכאן ש- $D_n \triangleleft \langle \sigma \rangle$   $2 = \frac{|D_n|}{|\langle \sigma \rangle|}$ .

**הגדרה:** תהא  $G$  חבורה.  $a, b \in G$  יקראו צמודים אם קיים  $x \in G$  כך ש- $a = xbx^{-1}$ .

ננסח מחדש את הגדרת הנורמליות:

$H \leq G$  תח"נ אם היא סגורה להצמדות, כלומר, לכל  $h$  שייך ל- $H$  ולכל  $g$  שייך ל- $G$  מתקיים  $ghg^{-1} \in H$ .

**תרגיל:** תהא  $G$  חבורה,  $H \leq G$  ו- $N \triangleleft G$  אזי  $N \cap H \triangleleft H$ .

פתרון: צ"ל  $N \cap H \triangleleft H$   $\forall h \in H : h(N \cap H)h^{-1} \subseteq N \cap H$ .

• שימו לב ש- $N \cap H$  אכן ת"ח של  $H$  שכן ראינו שחיתוך של ת"ח הוא ת"ח

במילים אחרות, צ"ל: לכל  $h$  שייך ל- $H$  ולכל  $x \in N \cap H$  מתקיים  $h x h^{-1} \in N \cap H$ .

קודם כל, נניח ש- $x \in N \cap H$ , ולכן  $x$  שייך ל- $H$ . ולכן  $hxh^{-1} \in H$  בגלל הסגירות של ת"ח  $H$ . שנית,  $x$  שייך ל- $N$ , ולכן  $hxh^{-1} \in N \cap H$  כי  $N \triangleleft G$ . ■ מ.ש.ל.  $hxh^{-1} \in N \cap H$ .

הגדרה: יהיו  $N, H \leq G$  נגדיר את המכפלה  $HN = \{hn | h \in H, n \in N\}$ .

**תרגיל**: בבית תוכיחו את הטענה הבאה: אם  $N, H \triangleleft G$  אזי  $HN \triangleleft G$ .

עכשיו הראו שאם  $H, N$  ת"ח לא נורמליות אז  $HN$  אינה בהכרח ת"ח של  $G$ .

פתרון ב- $D_3$  נבחר:  $H = \langle \tau \sigma \rangle = \{\tau \sigma, id\}$ ,  $N = \langle \tau \rangle = \{\tau, id\}$ .  $N$  אינה נורמלית שכן  $N\sigma \neq \sigma N$ . גם  $H$  אינה נורמלית, מכיוון ש- $H\tau \neq \tau H$ .

עכשיו נראה ש- $HN$  אינה ת"ח של  $G$ .  $HN = \{\tau \tau \sigma, \tau, \tau \sigma, id\} = \{\sigma, \tau, \tau \sigma, id\}$ . וזו לא תת חבורה של  $D_3$  בגלל שתי סיבות:

א. לגרנג'י: הסדר שלה בכלל לא מחלק את 6 (4 לא מחלק את 6)

ב. אין בה סגירות:  $\sigma^2 \notin HN$ .

■ מ.ש.ל.

### הומומורפיזמים

תהינה  $H, G$  חבורות. העתקה  $\varphi: G \rightarrow H$  תקרא הומומורפיזם אם  $\forall a, b \in G: \varphi(a \cdot_G b) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b)$ .

תכונות:

1.  $\varphi(e_G) = e_H$
2.  $\forall n \in \mathbb{Z}: \varphi(a^n) = \varphi(a)^n$  ובפרט  $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$
3.  $\forall a \in G: O(\varphi(a)) \mid O(a)$
4. אם  $G$  אבלית אזי  $\varphi(G) \leq H$  היא אבלית.
- איזומורפיזם: הומומורפיזם חח"ע ועל. הוא שומר על:

- א. סדר של חבורה
- ב. סדר של כל איבר
- ג. אבליות
- ד. ציקליות

דוגמאות:

1. האם  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4$ ? לא! מכיוון ש- $\mathbb{Z}_4$  ציקלית ו- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  לא.
2. האם בין כל שתי חבורות  $G, H$  ניתן למצוא הומומורפיזם? כן. הומומורפיזם טריוויאלי.  $\varphi: G \rightarrow H$  כך ש- $\varphi(a) = e_H \forall a \in G$ .
3. תהא  $G$  חבורה אבלית. יהי  $n$  שלם. האם  $\varphi: G \rightarrow G$  המוגדרת על ידי  $\varphi(x) = x^n$  היא הומומורפיזם?

אבליות

$$\varphi(xy) = (xy)^n \stackrel{אבליות}{=} x^n y^n = \varphi(x)\varphi(y) \text{ כן.}$$

4. האם  $\mathbb{Q} \cong \mathbb{R}$  ?  
 לא. משיקולי עוצמות ידוע כי  $|\mathbb{Q}| \neq |\mathbb{R}|$ .
5. האם  $5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$  ?  
 כן. כל החבורות הציקליות האינסופיות הן איזומורפיות זו לזו. האיזומורפיזם הדרוש הוא  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow 5\mathbb{Z}, \varphi(n) = 5n$ .
6. האם  $\mathbb{Z}_6 \cong D_3$  ?  
 לא. משיקולי אבליות.
7. האם  $S_3 \cong D_3$  ? תחשבו על זה, נענה על זה בהמשך הקורס ☺

**תרגיל:** יהי  $\varphi: G \rightarrow H$  אפימורפיזם. הוכיח שאם  $G$  ציקלית אזי  $H$  ציקלית.

פתרון:  $G$  ציקלית ולכן קיים  $g$  ב- $G$  כך ש- $\langle g \rangle = G$ . נסמן  $\varphi(g) = h$ . נרצה להראות  $\langle h \rangle = H$ . יהי  $x$  ב- $H$  וצ"ל שקיים  $i$  כך ש- $x = h^i$ . עבור  $x$  ששייך ל- $H$  קיים  $a$  שייך ל- $G$  כך ש- $\varphi(a) = x$  כי  $\varphi$  אפימורפיזם.  $a \in \langle g \rangle$  ולכן קיים  $i$  כך ש- $a = g^i$  ולכן  $x = \varphi(a) = \varphi(g^i) = \varphi(g)^i = h^i$ . ■ מ.ש.ל.

הערה: אפימורפיזם מעביר קבוצת יוצרים לקבוצת יוצרים.

**תרגיל:**

**הוכיחו/הפריכו:**

1. קיים איזומורפיזם  $f: (\mathbb{Q}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$
2. קיים אפימורפיזם  $f: H \rightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  כאשר  $H = \langle 5 \rangle \leq (\mathbb{R}^*, \cdot)$
3. קיים מונומורפיזם  $f: (GL_2(\mathbb{Q}), \cdot) \rightarrow (\mathbb{Q}^{10}, +)$

פתרון:

1. נניח בשלילה שקיים איזומורפיזם. קיים  $C$  ב- $\mathbb{Q}$  כך ש- $f(5) = C$ . אבל  $f$  אפי' ולכן קיים מקור ל- $\frac{C}{2}$ . שנסמנו ב- $x: f(x) = \frac{C}{2}$ . אמור להתקיים  $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = C = f(5)$  אבל  $f(x^2) = f(x) + f(x) = C$  חח"ע ולכן  $x^2 = 5$  וזאת סתירה.
2.  $H$  ציקלית, ו- $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  לא ציקלית (הראנו במהלך השיעור כי הסדר של כל איבר הוא לכל היותר 3 ולכן אין איבר מסדר 9). ולכן זו הפרכה, אין אפימורפיזם.
3. הפרכה: ראשית נסכים על הטענה שעבור  $f: G \rightarrow H$  מונו' אזי ההעתקה על התמונה  $f(G) \rightarrow H$  היא איזומורפיזם. אם קיים מונומורפיזם כנ"ל, אזי קיים איזומורפיזם לתת חבורה של  $(\mathbb{Q}^{10}, +)$ , אבל זאת סתירה, כי  $(\mathbb{Q}^{10}, +)$  אבלית ועם זאת ידוע לנו כי  $(GL_2(\mathbb{Q}), \cdot)$  אינה אבלית.

**כולם הפרכות! בסתירה ללוגיקה של גיא ☺**

גרעין ותמונה:

יהי  $\varphi: G \rightarrow H$  הומומורפיזם

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{g \in G: \varphi(g) = e_H\} \\ \text{Im} \varphi &= \{\varphi(g): g \in G\} = \{h \in H: \exists g \in G: \varphi(g) = h\} \end{aligned}$$

ראינו בשיעור שמתקיים  $\text{Im} \varphi \leq H, \ker(\varphi) \triangleleft G$

דוגמאות:

1.  $\varphi(n, k) = (2n, 2k \pmod{6})$ .  $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_6$

$\ker \varphi = \{0\} \times \{0, 3\}$ ,  $\text{Im} \varphi = 2\mathbb{Z} \times \{0, 2, 4\}$ .

2.  $\mathbb{R}_3[x]$  החבורה החיבורית של פולינומים במקדמים ממשיים עד דרגה 3 כולל.

נגדיר  $f: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$  כך ש  $f(p(x)) = p'(x)$

הפולינומים הקבועים  $\ker(f) = \{c : c \in \mathbb{R}\}$

ועבור התמונה ברור כי  $\text{Im}(f) \cong \mathbb{R}_2[x]$

• צמודים (אתגר):

אם הסדר של חבורה  $G$  הוא אי זוגי, אזי אף איבר (פרט ליחידה) אינו צמוד להופכי שלו!