

תרגול מס' 14
עקרון הארגומנט ומשפט רושה
עקרון הארגומנט:

תהי f המוגדרת בתחום D כלשהו, ו- Γ מסלול סגור-פשוט, המוכל יחד עם הפנים שלו ב- D .
 כך שמתקיים:

1. f אנליטית ואין לה אפסים על Γ .
2. ל- f מספר סופי של נקודות סינגולריות בתוך Γ , שכולן קטבים.

אז מתקיים:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

כאשר:

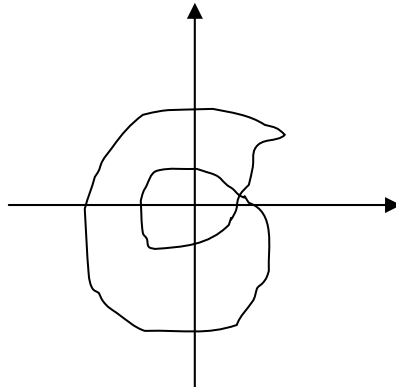
N = מספר האפסים של f בתוך Γ (כאשר אפס מסדר m נספר m פעמים)
 P = מספר הקטבים של f בתוך Γ (כאשר קוטב מסדר m נספר m פעמים)

הערך $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ (שהוא מספר שלם) נקרא גם "האינדקס" של $f(\Gamma)$ שהוא מספר

הפעמים שהמסלול $f(\Gamma)$ מקיף את הראשית.

למשל –

האינדקס של המסלול:



הוא 2 (בהנחה שהולכים לאורך הקו פעם אחת בלבד ובכיוון החיובי...).

משפט רושה:

תהיינה f, g אנליטית בתחום D . Γ - קונטור סגור פשוט המוכל יחד עם הפנים שלו ב- D .
 אם לכל $z \in \Gamma$ מתקיים: $|g(z)| < |f(z)|$, אז ל- f ול- $f + g$ יש אותו מספר אפסים בפנים של Γ (כאשר אפס מסדר m נספר m פעמים).

תרגיל מס' 1

$$\text{חשבו: } I = \int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \text{ כאשר: } f(z) = \frac{(z+3)(z+1)}{z^2}$$

פתרון

האפסים של f הם $z = -3$ ו- $z = -1$ ושניהם אפסים פשוטים. מתוכם, רק $z = -1$ נמצא בתוך המעגל $\{z \mid |z| = 2\}$, לכן נקבל: $N=1$.
הקוטב היחיד של f הוא $z = 0$, והוא קוטב מסדר 2 (מדוע?) ולכן $P=2$.

$$\text{סה"כ נקבל: } I = 2\pi i(N - P) = 2\pi i(1 - 2) = -2\pi i$$

תרגיל מס' 2

$$\text{חשבו את האינטגרל: } I = \int_{|z|=1} \frac{\sin 2z}{\sin^2 z - \frac{1}{2}} dz$$

פתרון

$$\text{נסמן: } f(z) = \sin^2 z - \frac{1}{2}$$

$$\text{אז: } f'(z) = 2 \sin z \cos z = \sin 2z$$

$$\text{ונקבל: } I = \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

כעת נמצא את מספר האפסים של f :

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$z = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\text{האפסים שנמצאים בתוך מעגל היחידה הם אם כן: } z_1 = \frac{\pi}{4}, z_2 = -\frac{\pi}{4}$$

והם אפסים פשוטים, שכן: $f'(z) = \sin 2z$ ולכן:

$$f'(z_1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$$

$$f'(z_2) = \sin -\frac{\pi}{2} = -1 \neq 0$$

כלומר נקבל סה"כ: $N=2$.
 הפונקציה f היא אנליטית בתוך מעגל היחידה ולכן $P=0$ (אין קטבים).

כמו כן, נשים לב כי f אנליטית ואינה מתאפסת על מעגל היחידה, לכן תנאי עקרון הארגומנט מתקיימים ואפשר לרשום:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I = 4\pi i}$$

שימו לב: היה ניתן לחשב את האינטגרל גם בעזרת משפט השארית, אבל אז היינו צריכים לחשב שאריות והיה יוצא קצת יותר ארוך.

תרגיל מס' 3

נתון: $|a| < e^{-1}$.

צ"ל: לא קיים מספר מרוכב $|z| < 1$, כך שמתקיים: $e^z = az^3$.

פתרון

נסמן: $f(z) = e^z, g(z) = -az^3$.

כעת, לכל z על מעגל היחידה מתקיים: $|f(z)| = |e^z| = e^x \geq e^{-1}$ וכן $|g(z)| = |az^3| = |a|$.
 כמו כן נתון כי $|a| < e^{-1}$, ולכן נקבל כי לכל z על מעגל היחידה מתקיים:

$$|g(z)| = |a| < e^{-1} \leq |f(z)|$$

כלומר: $|g(z)| < |f(z)|$.

ברור כי f, g אנליטיות בתוך ועל מעגל היחידה, ולכן עפ"י משפט רושה נסיק כי ל $f+g$ ול $f-g$ אותו מספר אפסים בתוך מעגל היחידה.

אבל $f(z) = e^z \neq 0$ לכל z , בפרט אין ל f אפסים בתוך עיגול היחידה ולכן גם ל $f+g$ אין אפסים בתוך היחידה.

כלומר לא קיים $|z| < 1$ כך ש: $0 = f(z) + g(z) = e^z - az^3$, או במלים אחרות, לא קיים z בעיגול היחידה המקיים: $e^z = az^3$.

תרגיל מס' 4

כמה פתרונות יש למשוואה: $z^4 + 5z + 1 = 0$:

א. בעיגול: $D_1 = \{z \mid |z| < 1\}$

ב. בטבעת: $D_2 = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$

פתרון

א. נסמן: $f(z) = 5z, g(z) = z^4 + 1$.

כעת, על מעגל היחידה מתקיים: $|f(z)| = |5z| = 5 > 2 = |z|^4 + 1 \geq |z^4 + 1| = |g(z)|$
 כמו כן ברור כי f, g אנליטיות על ובתוך מעגל היחידה, ולכן נסיק כי מספר האפסים של f ב- C_1
 שווה למספר האפסים של $f+g$ ב- C_1 .
 אבל $f(z) = 5z$ ולכן ברור כי ל- f יש אפס פשוט אחד ב- C_1 , לכן ל- $f+g$ יש אפס אחד ב- C_1 ,
 כלומר קיים z יחיד ב- C_1 , המקיים: $f(z) + g(z) = z^4 + 5z + 1 = 0$.
 לכן למשוואה הנתונה יש פתרון יחיד בעיגול C_1 .

$$\text{ב. נסמן: } f(z) = z^4, g(z) = 5z + 1$$

משפט רושה לא מתקיים עבור טבעת, אבל אפשר לחשב כמה פתרונות יש בעיגול החיצוני
 ולהפחית ממספר הפתרונות בעיגול הפנימי, ולקבל את מספר הפתרונות בטבעת (כמעט).
 אז על המעגל $\{z \mid |z| = 2\}$, מתקיים: $|f(z)| = |z|^4 = 16 > 11 = 5|z| + 1 \geq |5z + 1| = |g(z)|$.
 לכן, נסיק כי מספר האפסים של f שווה למספר האפסים של $f+g$ בעיגול $\{z \mid |z| < 2\}$.
 כיוון של- f יש אפס מסדר 4, נסיק כי גם ל- $f+g$ יש 4 אפסים בעיגול $\{z \mid |z| < 2\}$.
 מסעיף א' אנחנו יודעים כי בעיגול בעיגול $\{z \mid |z| < 1\}$, יש פתרון אחד.
 כמו כן, על מעגל היחידה הראנו בחלק א' כי מתקיים: $|5z| > |z^4 + 1|$, ולכן:
 $\|5z\| - \|z^4 + 1\| > 0$, כלומר אין למשוואה פתרונות על מעגל
 היחידה, ולכן נסכם ונסיק כי בטבעת C_2 יש $4 - 1 = 3$ פתרונות למשוואה.

באופן כללי:

אם יש לנו משוואה כזו: $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ ורוצים למצוא מספר פתרונות בתוך
 עיגול מסויים, אז בוחרים את האיבר "הכי חזק", כלומר שערכו המוחלט גבוה מכל השאר על
 המעגל המדובר, ומגדירים אותו להיות f , ואת שאר הפולינום להיות g .

תרגיל מס' 5

תהי $g(z)$ אנליטית בתוך ועל הקונטור Γ (סגור-פשוט).
 נתון כי הראשית נמצאת בפנים של Γ וכן, כי לכל $z \in \Gamma$ מתקיים: $|g(z)| < |z|$.
 צ"ל: קיימת נקודת שבת יחידה ל- g בתוך Γ .

פתרון

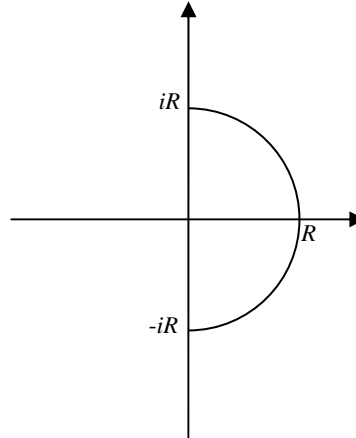
נתון כי g אנליטית בתוך ועל Γ . כעת, אם נסמן $f(z) = -z$, אז מהנתון
 $|g(z)| < |z| = |f(z)|$, נסיק כי תנאי משפט מתקיימים על Γ , ולכן ל- $f+g$ אותו
 מספר אפסים בתוך Γ .
 אבל $f(z) = z$, ברור כי יש לה בדיוק אפס אחד בתוך Γ (כי הראשית נמצאת בפנים שלו).
 ולכן נסיק כי ל- $f+g$ יש אפס אחד בתוך Γ . כלומר למשוואה: $0 = f(z) + g(z) = g(z) - z$
 פתרון יחיד, כלומר קיימת נקודה שבת יחידה ל- g בתוך Γ .

תרגיל מס' 6

צ"ל: למשוואה: $z = \lambda - e^{-z}$ ($\lambda > 1$), יש פתרון יחיד בחצי המישור הימני.

פתרון

נסמן: $f(z) = z - \lambda$, $g(z) = e^{-z}$.
 כעת נסתכל על הקונטור Γ_R הבא:



עבור כל $R > \lambda + 1$ מתקיים:
 • על חצי המעגל:

$$|f(z)| = |z - \lambda| \geq \|z\| - \lambda = R - \lambda > 1$$

$$|g(z)| = |e^{-z}| = e^{-x} \leq 1 \quad \leftarrow x \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$|f(z)| > |g(z)|$$

• על הקטע $[-iR, iR]$:

$$|f(z)| = |z - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 + y^2} > 1 \quad \leftarrow x = 0$$

$$|g(z)| = |e^{-z}| = e^{-x} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$|f(z)| > |g(z)|$$

כלומר קיבלנו כי על Γ_R מתקיים: $|f(z)| > |g(z)|$ (עבור $R > \lambda + 1$), כמו כן ברור כי f, g אנליטית בתוך ועל Γ_R , ולכן עפ"י משפט רושה נסיק כי מספר האפסים של $f+g$ בתוך Γ_R הוא זהה.
 אבל ברור כי ל f יש בדיוק אפס פשוט אחד בתוך Γ_R (עבור $R > \lambda + 1$) והוא: $z = \lambda$.
 לכן גם ל $f+g$ יש בדיוק אפס אחד בתוך Γ_R , כלומר למשוואה:
 $0 = f(z) + g(z) = z - \lambda + e^{-z}$, יש פתרון יחיד ב- Γ_R , וזו בעצם המשוואה: $z = \lambda - e^{-z}$.
 כלומר הראנו כי לכל R מספיק גדול, מספר הפתרונות של המשוואה בתוך חצי המעגל ברדיוס R הוא בדיוק 1. לכן נסיק שה"כ בחצי המישור הימני למשוואה יש בדיוק פתרון אחד.