

מבחן מועד ב בבדידה 2 למהנדסים, 83-118, סמסטר

ב, תשע"ח

מרצה: ד"ר קונסטנטין גולובב

מתרגל: אריאל ויצמן.

- כל השאלות הינן חובה.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- אין צורך לחשב במדוייק דברים כמו  $\frac{2549!}{236!}$  ...

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

**בהצלחה!**

1. יהי  $G$  גרף פשוט וסופי. הוכיחו שקיימים שני קודקודים בעלי אותה דרגה. (15 נקודות)

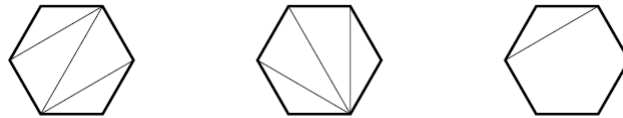
2. יהיו  $k, n, m \in \mathbb{N}$  כך ש  $0 \leq k \leq n, m$  הוכיחו:

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

(20 נקודות)

3. א. מהו מספר קטלן  $C_n$ . (5 נקודות)

ב. יהי  $P$  מצולע משוכלל בן  $n+2$  צלעות. אלכסון של מצולע  $P$  הוא קו המחבר שני קודקודים של  $P$  ונמצא בחלקו הפנימי. נאמר ששני אלכסונים לא נחתכים אם אין להם נקודה משותפת בחלקו הפנימי של  $P$ . שילוש של מצולע הוא חלוקה שלו למשולשים על ידי קבוצה מקסימלית של אלכסונים לא נחתכים. לדוגמא:



איור 1:

כאשר במשושה מצד ימין מסומן רק אלכסון אחד, ומצד שמאל ובאמצע 2 שילושים שונים. ידוע שכל מצולע משוכלל ניתן לשילוש.

כמה שילושים אפשריים יש למצולע משוכלל בן  $n+2$  צלעות? נוסחת נסיגה מהווה תשובה מלאה לשאלה זו. (עבור  $n=0$  הניחו שיש 'שילוש' אחד). (15 נקודות)

4. משפט החתונה של הול.

א. נסחו אותו. (5 נקודות)

ב. הוכיחו אותו. (20 נקודות)

5. יהי  $G$  גרף  $d$ -רגולרי.

א. הגדירו: מטריצת שכנויות של גרף. (5 נקודות)

ב. הגדירו: הרחבה של גרף. (5 נקודות)

ג. נסחו את משפט צ'יגר בעזרת ערכים עצמיים של מטריצת השכנויות. (5 נקודות)

ד. רשמו את הערכים העצמיים של  $A_{K_n}$  (כאשר  $K_n$  זהו הגרף המלא עם  $n$  קודקודים),

וודאו כי אי-השוויון במשפט צ'יגר אכן הדוק עבורו. (5 נקודות)

6. יהי  $G = (V, E)$  גרף פשוט וסופי כך שקיימות קבוצות  $A, B \subseteq V$  לא ריקות

המקיימות:  $A \cap B = \emptyset, A \cup B = V$ . עוד נניח שיש  $a \in A, b \in B$  כך ש-

$\{a, b\} \in E$  וזו הקשת היחידה בין  $A$  ל- $B$ . כלומר, לכל  $a \neq v \in A, b \neq u \in B$

מתקיים  $\{v, u\}, \{a, u\}, \{v, b\} \notin E$ . הוכיחו שקיים ב- $G$  קודקוד בעל דרגה אי-זוגית.

(10 נקודות)