פתרון תרגיל מספר 2

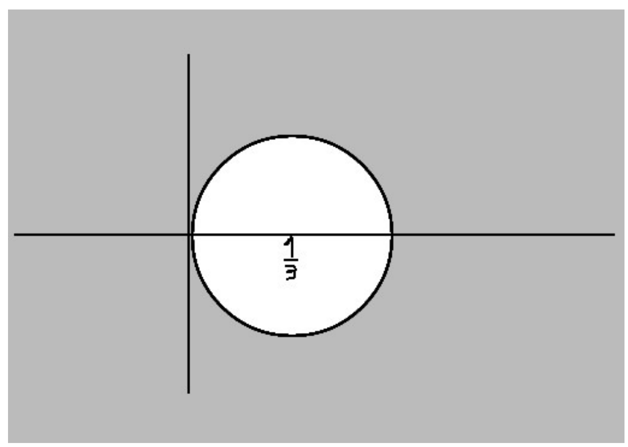
1. שרטטו את התחומים הבאים במישור.

א. $\left\{z\in\mathbb{C}:|z-1|<|2z-1|\right\}$

<u>פתרון</u>:

$$|z-1|<|2z-1|\Leftrightarrow|z-1|^2<|2z-1|^2\Leftrightarrow(z-1)\overline{(z-1)}<(2z-1)\overline{(2z-1)}\Leftrightarrow$$
$$(z-1)(\bar{z}-1)<(2z-1)(2\bar{z}-1)\Leftrightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1<4z\bar{z}-2z-2\bar{z}+1\Leftrightarrow$$
$$|z|^2-z-\bar{z}+1<4|z|^2-2z-2\bar{z}+1\Leftrightarrow3|z|^2-z-\bar{z}>0\Leftrightarrow3\left(x^2+y^2\right)-(x+iy)-\overline{(x+iy)}>0$$
$$\Leftrightarrow3\left(x^2+y^2\right)-(x+iy)-(x-iy)>0\Leftrightarrow3\left(x^2+y^2\right)-2x>0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2>\frac{1}{3^2}$$

לכן קיבלנו חוץ של עיגול (ללא השפה) עם מרכז ב- $\left(\frac{1}{3},0\right)$ ורדיוס $\frac{1}{3}$.

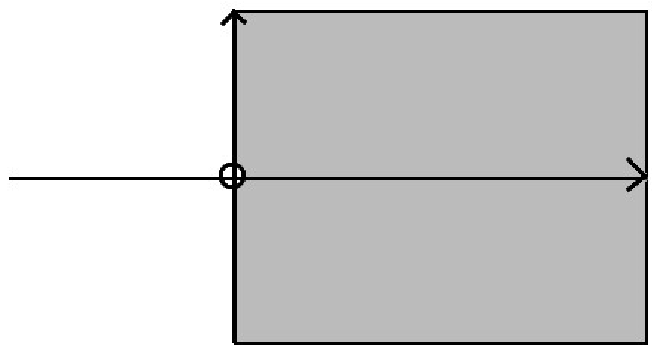


ב. $\left\{z\in\mathbb{C}:z\neq0,0\leq\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$

<u>פתרון</u>: $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\geq0\Leftrightarrow\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right)\geq0\Leftrightarrow\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy}\right)\geq0\Leftrightarrow\operatorname{Re}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)\geq0$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0, \ \left(y \neq 0 \text{ if } \ x=0\right)$$

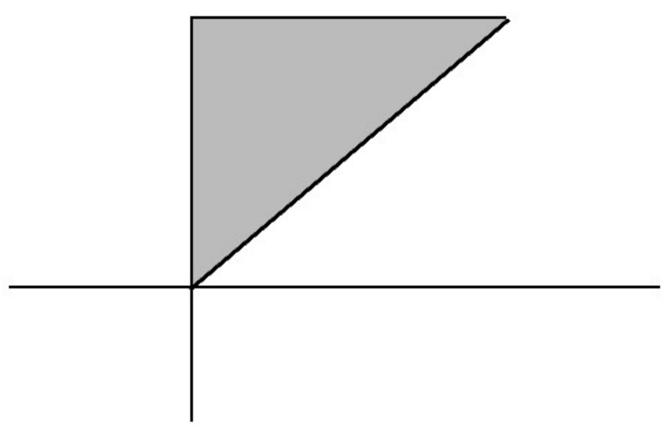
לכן קיבלנו את חצי המישור הימני ללא הראשית.



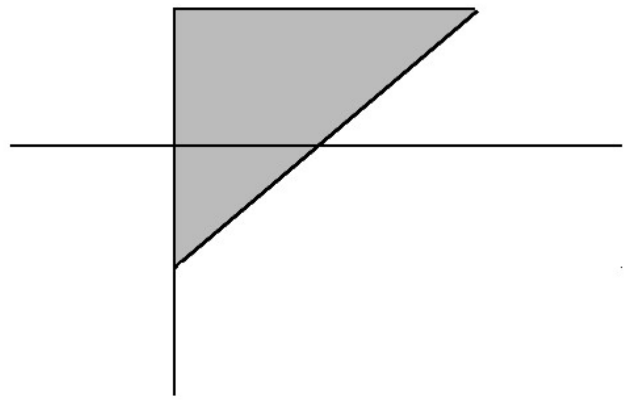
ג. $\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} \leq \arg\left(z+i\right) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

פתרון: נסמן $w = z + i$ ואז במישור המשתנה w התחום המתקבל הוא $\left\{w \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} \leq \arg w \leq \frac{\pi}{2}\right\}$, כלומר

התחום הוא קבוצת כל המספרים המרוכבים עם זווית בין $\frac{\pi}{4}$ ל- $\frac{\pi}{2}$, כלומר



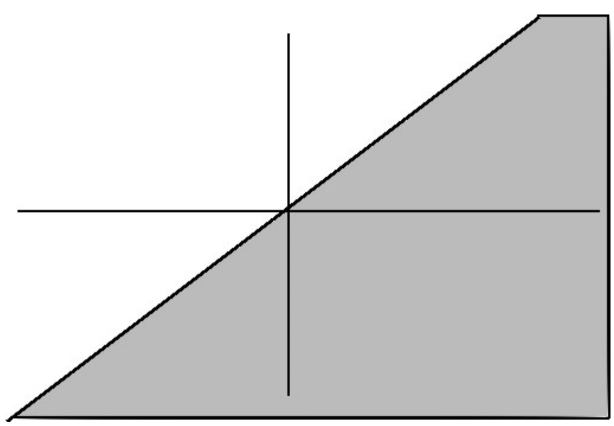
כיוון ש- $z=w-i$ עלינו להזיז את התחום שהתקבל במישור המשתנה w בציר המדומה יחידה אחת למעטה, לכן התחום המתקבל הוא



ד. $\left\{z\in\mathbb{C}:\left|e^{(1+i)z}\right|>1\right\}$

<u>פתרון</u>: $\left|e^{(1+i)z}\right|>1\Leftrightarrow\left|e^{(1+i)(x+iy)}\right|>1\Leftrightarrow\left|e^{x-y+i(x+y)}\right|>1\Leftrightarrow e^{x-y}>1\Leftrightarrow x-y>0$

לכן תמונת התחום המתקבלת היא



2. א. הוכיחו שלכל z ממשי $\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$, ומצאו את כל המספרים המרוכבים z המקיימים משוואה זו.

<u>פתרון</u>: עבור z ממשי השוויון מתקיים מאופן מיידי מהעובדה שפונקציית קוסינוס המרוכבת מתלכדת עם פונקציית קוסינוס הממשית על הציר הממשי. כעת נבדוק מתי השוויון מתקיים באופן כללי, לשם כך נמצא קודם את הנוסחאות המפורשות עבור $\cos\bar{z}$ ו- $\overline{\cos z}$, לשם כך קודם נמצא את הנוסחא המפורשת של $\cos z$ (כלומר נמצא את הפירוק שלה לחלק ממשי ומדומה):

$$\cos z=\cos(x+iy)=\frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-y+ix}+e^{y-ix}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos x-i\sin x)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right)\cos x-\frac{i}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right)\sin x=\cosh y\cos x-i\sinh y\sin x$$

לכן מהנוסחא עבור קוסינוס נקבל

$$\cos\bar{z}=\cos(x-iy)=\cosh(-y)\cos x-i\sinh(-y)\sin x=\cosh y\cos x+i\sinh y\sin x$$
$$\overline{\cos z}=\overline{\cosh y\cos x-i\sinh y\sin x}=\cosh y\cos x+i\sinh y\sin x$$

לכן השוויון בין הפונקציות מתקיים לכל מספר מרוכב.

ב. הוכיחו את הזהויות הבאות

- $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$
- $\cos(z+w)=\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)$

<u>פתרון:</u>

$$\cosh^2 z-\sinh^2 z=\left(\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{2z}+e^{-2z}+2\right)-\frac{1}{4}\left(e^{2z}+e^{-2z}-2\right)=1$$

$$\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\frac{1}{2}\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)-\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(e^{iz+iw}+e^{iz-iw}+e^{-iz+iw}+e^{-iz-iw}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{iz+iw}-e^{iz-iw}-e^{-iz+iw}+e^{-iz-iw}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{iz+iw}+e^{-iz-iw}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}\right)=\cos(z+w)$$

ג. חשבו את החלק הממשי של $\sin(x+iy)$ ואת החלק המדומה של $\cosh(x+iy)$.

<u>פתרון:</u>

$$\sin(x+iy)=\frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{-y+ix}-e^{y-ix}\right)$$
$$=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)\right)=-\frac{i}{2}\left(e^{-y}-e^{y}\right)\cos x+\frac{1}{2}\left(e^{-y}+e^{y}\right)\sin x$$
$$=\cosh y\sin x+i\sinh y\cos x$$

לכן החלק הממשי של פונקציית סינוס המרוכבת הוא: $\cosh y\sin x$.

$$\cosh(x+iy)=\frac{1}{2}\left(e^{x+iy}+e^{-x-iy}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{x}(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\cos y+\frac{i}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\sin y=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$$

לכן החלק המדומה של פונקציית קוסינוס ההיפרבולית המרוכבת הוא: $\sinh x\sin y$.

ד. - הוכיחו כי לכל $w\in\mathbb{C}$ קבוע, למשוואה $\sin(z)=w$ יש אינסוף פתרונות.

<u>פתרון</u>: קודם נשים לב שמהגדרת פונקציית הסינוס נובע שהיא מחזורית עם מחזור 2π (כי הפונקציה $f(x)=e^{ix}$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור 2π). לכן אם נמצא פתרון אחד $z=z_0$ למשוואה $\sin(z)=w$ אז למעשה נקבל קבוצה אינסופית של פתרונות $z=z_0+2\pi k$ כאשר k מספר שלם. מהגדרת סינוס המרוכבת נובע שהמשוואה בשאלה שקולה ל- $e^{iz}-e^{-iz}=2iw$. נסמן $\lambda=e^{iz}$ ונקבל את המשוואה $\lambda^2-2i\lambda w-1=0$. קיבלנו משוואה ריבועית ולמשוואה זו יש לפחות פתרון אחד (גם אם הדסקרימיננטה שלילית נקבל פתרון כי אנו מרשים פתרונות מרוכבים). נסמן פתרון של משוואה זו ב- λ_0 ואז עבור המשתנה z נקבל את המשוואה $e^{iz}=\lambda_0$, כיוון ש- $\lambda_0\neq 0$ נובע שלמשוואה זו יש פתרון (הוכיחו זאת). לכן הוכחנו את הטענה.

- הוכיחו כי אם $|c|\le 1$ מספר ממשי אז למשוואה $\sin(z)=c$ יש רק פתרונות ממשיים.

<u>פתרון</u>: בסעיף ג' מצאנו את הפירוק של פונקציית סינוס המרוכבת לחלק ממשי וחלק מדומה:

$$\sin(x+iy)=\cosh y\sin x+i\sinh y\cos x$$

לכן מהמשוואה בנתון ומהשוואת החלקים הממשיים והמדומים בהתאמה נקבל

$$(1)\ \cosh y\sin x=c,\ \ (2)\ \sinh y\cos x=0$$

ממשוואה (2) נובע ש- $\cos x=0$ או $\sinh y=0$.

- אם $\cos x=0$ אז המזהות $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ נקבל ש- $\sin x=\pm 1$ ולכן ממשוואה (1) נקבל ש- $\cosh y=\pm c$, או באופן שקול (כיוון ש- $\cosh$ היא פונקציה אי שלילית), $\cosh y=|c|$. כיוון ש- $0\le|c|\le 1$ ו- $\cosh y\ge 1$ נובע שבהכרח $\cosh y=1$ ופתרון משוואה זו הוא $y=0$. לכן במקרה זה הפתרון הוא ממשי.

- אם $\sinh y=0$ אז חישוב ישיר מראה שפתרון משוואה זו הוא $y=0$, לכן גם במקרה זה הפתרון ממשי.