חשבון אינפי 1 למדמ"ח

תרגיל 7- פתרון

1. לגליל נתון נפח קבוע. רדיוס הגליל גדל בקצב של מטר 1 בשניה. מצאו את קצב השינוי של גובהו של הגליל בזמן שגם רדיוסו וגם גובהו שניהם שווים מטר אחד.

פתרון:

נסמן t -זמן

V-נפח הגליל

r-רדיוס הגליל

h-גובה הגליל

נתון $\frac{dr}{dt}=1$ וכן נתון שבזמן t_0 $r(t_0)=h(t_0)=1$.

צריך למצוא $\frac{dh}{dt}(t_0)=?$.

$V(t)=\pi\cdot r^2(t)\cdot h(t)$ ולכן $0=\frac{dV}{dt}=2\pi rh\frac{dr}{dt}+\pi r^2\frac{dh}{dt}$ (הנגזרת אפס, כי נתון שהנפח קבוע) ומכאן $\frac{dh}{dt}=\frac{-2\pi rh\frac{dr}{dt}}{\pi r^2}=\frac{-2h\frac{dr}{dt}}{r}=\frac{-2\cdot1\cdot1}{1}=-2$

2. מצאו את קבוצות כל הנקודות בהן הפונקציות הבאות רציפות:

א. $f(x)=\frac{x+2}{(x-1)(x-3)^{1/3}}$

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ בתחום זה הפונקציה רציפה כמכפלה ומנה של פונקציות רציפות.

ב. $f(x)=\sqrt[4]{x^2-x^3}$

פתרון: $x^2-x^3\ge 0\Leftrightarrow x^2(1-x)\ge 0\Leftrightarrow x\le 1$, כלומר $D(f)=(-\infty,1]$ ובתחום זה הפונקציה רציפה כשורש של פונקציה אי שלילית רציפה.

אפשר גם להגיד שהפונקציה רציפה כהרכבה של שתי פונקציות רציפות:

$\forall x\in(-\infty,1]$ $g(x)=x^2-x^3\ge 0$ ו- $h(x)=\sqrt[4]{x}$. $f(x)=(h\circ g)(x)$

ג. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} & x\ge 2, x\ne 4\\ \frac{2}{3} & x=4\end{cases}$

פתרון: $D(f)=[2,\infty)$. לכל $x\in[2,4)\cup(4,\infty)$ הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק האם הפונקציה רציפה ב- $x=4$:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=st\left(\frac{2\left(\sqrt{2+\vartriangle x}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{9+2\vartriangle x}+3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

כאשר $x=4+\vartriangle x,\ \vartriangle x\approx0,\ \vartriangle x\neq0$.

קיבלנו $\lim_{x\to4}f(4)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\neq\frac{2}{3}=f(4)$ ולכן $x=4$ נקודת אי רציפות סליקה.

3. עבור אילו ערכים של a הפונקציה הבאה רציפה ב- $x=0$?

$$f(x)=\begin{cases}-3x+4 & x\le0\\ \dfrac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2} & x>0\end{cases}$$

פתרון:

ע"מ שהפונקציה תהיה רציפה, נדרוש כי $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(-3x+4)=4=f(0)$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\sqrt{1+ax^2}-1\right)\left(\sqrt{1+ax^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1+ax^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+1\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{ax^2}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{a}{\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\frac{a}{2}$$

כאשר $x=\vartriangle x\approx0,\ \vartriangle x>0$

ולכן כדי שהפונקציה תהיה רציפה ב- $x=0$ צריך לדרוש $\frac{a}{2}=4$ ומכאן $a=8$.

4. מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות וקבעו את סוג אי הרציפות :

א. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ ב- $\mathbb{R}$

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.
נבדוק את סוג אי הרציפות ב- $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$$

(קיבלנו מספר אינפיניטסימלי חלקי מספר סופי שאינו אינפיניטסימלי ולכן הגבול אפס).
הגבול קיים, אך הפונקציה לא מוגדרת בנקודה ולכן $x=0$ נקודת **אי רציפות סליקה** .

ב. $f(x)=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$ ב- $(-7,\infty)$

פתרון: $D(f)=[-7,\infty)\setminus\{-2,2\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כהרכבה ומנה של פונקציות רציפות (אין צורך לבדוק רציפות מימין בנקודה $x=-7$, כי היא מחוץ לתחום המבוקש)
נקודות אי רציפות הן $x=\pm 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}$$

הגבול קיים וסופי ולכן $x=2$ נקודת **אי רציפות סליקה** .

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{(x-2)(x+2)}=st\left(\frac{\sqrt{5+\vartriangle x}-3}{\vartriangle x(-4+\vartriangle x)}\right)$$

כאשר $x=-2+\vartriangle x,\ \vartriangle x\approx 0,\ \vartriangle x>0$. במקרה זה המספר $\frac{\sqrt{5+\vartriangle x}-3}{\vartriangle x(-4+\vartriangle x)}$ הינו מספר אינסופי ולכן החלק הסטנדרטי שלו לא מוגדר ולכן הגבול מימין בנקודה $x=-2$ אינו קיים

ולכן $x=-2$ נקודת **אי רציפות מסוג שני** .

5. האם הפונקציה הבאה רציפה ב- $x=-5$? האם היא גזירה בנקודה זו?

$$f(x)=\begin{cases} e^{x+5} & x>-5 \\ 5x+26 & x\le -5 \end{cases}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to -5^+} f(x)=\lim_{x\to -5^+} e^{x+5}=st\left(e^{\triangle x}\right)=1,\ x=-5+\triangle x,\ \triangle x\approx 0,\ \triangle x>0$$

$$\lim_{x\to -5^-} f(x)=\lim_{x\to -5^-}(5x+26)=st\left(5(-5+\triangle x)+26\right)=st\left(5\triangle x+1\right)=1,\ x=-5+\triangle x,\ \triangle x\approx 0,\ \triangle x<0$$

כלומר $\lim_{x\to -5^+} f(x)=\lim_{x\to -5^-} f(x)=1=f(-5)$ ולכן הפונקציה רציפה ב- $x=-5$.

נבדוק האם הפונקציה גזירה ב- $x=-5$:

$$\lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{f(-5+\triangle x)-f(-5)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{e^{\triangle x}-1}{\triangle x}=1$$

$$\lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{f(-5+\triangle x)-f(-5)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{5(-5+\triangle x)+26-1}{\triangle x}=5$$

כלומר הגבולות החד צדדיים שונים ולכן הגבול $\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(-5+\triangle x)-f(-5)}{\triangle x}$ לא קיים ולכן הפונקציה אינה גזירה בנקודה $x=-5$.

6. הוכיחו או הפריכו : תהי $f(x)$ פונקציה נתונה המוגדרת בנקודה $x=c$ וכן $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$, כלומר הגבול מימין בנקודה $x=c$ קיים ושווה לערך של הפונקציה בנקודה זו, אזי $\lim_{x\to c^-} f(x)$ קיים ומתקיים $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$.

תשובה: לא נכון.

דוגמא נגדית:

תהי $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$, אבל $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1\ne f(0)$.

דוגמא נוספת:

תהי $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

במקרה זה $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$, אבל $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$ לא קיים (במקרה זה הגבול אינסופי)