תרגיל 2-פתרון

שאלה 1 (ממבחן תשע"ד)

הוכיחו: $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\right)\le \ln 2\le \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}\right)$.

פתרון

נסתכל על החלוקה $T:0<0.25<0.5<0.75<1$ של הקטע $[0,1]$. הפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x}$ רציפה בקטע הנ"ל ולכן אינטגרבילית בו. נשים לב ש $\underline{S}(T)=\sum_{k=1}^{4}\inf_{x\in I_k} f(x)\cdot(\Delta x_k)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\right)$ שכן הפונקציה מונוטונית יורדת ולכן האינפימום בכל תת קטע מתקבל בקצה הימני. מסיבה דומה הסופרמום בכל תת קטע מתקבל בקצה השמאלי ולכן $\overline{S}(T)=\sum_{k=1}^{4}\sup_{x\in I_k} f(x)\cdot(\Delta x_k)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}\right)$.

מתקיים $\overline{S}(T)\ge\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2\ge \underline{S}(T)$. לכן,

$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\right)\le \ln 2\le \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}\right)$ כדרוש.

שאלה 2

חשבו בעזרת האינטגרל המסוים:

א. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$

פתרון

א.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\cdots+\frac{n}{2n}\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

נתבון בפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x}$ בקטע $[0,1]$. היא רציפה בקטע הנ"ל ולכן אינטגרבילית בו.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ הוא גבול של סכומי רימן המתאימים לסדרת החלוקות הנורמלית $\{T_n\}$,

כאשר לכל $n\in\mathbb{N}$ החלוקה T_n היא חלוקה שווה של הקטע (כלומר $\forall k\ \Delta x_k=\frac{1}{n}$) , ולבחירת

נקודות קצה ימניות $\alpha_k=\frac{k}{n}$. מכאן, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$.

כלומר, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$.

ב. הפונקציה $f(x)=e^x$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית בו. קל לראות ש

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$ הוא גבול של סכומי רימן המתאימים לסדרת החלוקות הנורמלית

ולבחירת נקודות בדיוק כמו בסעיף א' רק עבור הפונקציה $f(x)=e^x$. לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1.$$

שאלה 3

הוכיחו בעזרת האיטגרל המסוים:

א. $$\frac{1}{4}\le\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)\le 1$$

ב. $\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}\le\ln 2$

<u>פתרון</u>

א.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}+\frac{n^2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n^2}{(2n)^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

זהו גבול של סכומי רימן המתאימים לסדרת חלוקות שוות נורמלית של הקטע $[0,1]$ ושל

בחירת נקודת קצה ימניות בכל תת קטע עבור הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

פונקציה זו רציפה בקטע הנ"ל ולכן אינטגרבילית בו. מכאן,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$$

הפונקציה $\frac{1}{(1+x)^2}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,1]$ ולכן

$$1=\frac{1}{(1+0)^2}\ge\frac{1}{(1+x)^2}\ge\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}.$$

מכאן, $\frac{1}{4}=\int_0^1\frac{1}{4}dx\le\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx\le\int_0^1 1dx=1$ ונסיק הדרוש.

ב.

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$$

זהו גבול של סכומי רימן המתאימים לסדרת חלוקות שוות נורמלית של הקטע $[0,1]$ ושל בחירת נקודת קצה ימניות בכל תת קטע עבור הפונקציה $f(x)=\ln(1+x)$.

פונקציה זו רציפה בקטע הנ"ל ולכן אינטגרבילית בו. לכן,

$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}=\int_0^1\ln(1+x)dx$. הפונקציה $\ln(1+x)$ מונוטונית עולה בקטע $[0,1]$ ולכן, $\ln(1+x)\le\ln(1+1)=\ln 2$. מכאן, $\int_0^1\ln(1+x)dx\le\int_0^1\ln 2dx=\ln 2$ ונסיק הדרוש.

<u>שאלה 4</u>

האם הפונקציה הבאה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$? אם כן, מצאו את ערך האינטגרל.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}\\ 0 & otherwise\end{cases}.$$

<u>פתרון</u>

ברור שבכל נקודה $x\neq\frac{1}{n}$ הפונקציה רציפה (למה?) ולכן קבוצת נקודות אי הרציפות של הפונקציה היא בת מניה. ברור גם שהפונקציה חסומה. לכן, עפ"י משפט הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$. מותר לנו במצב זה לחשב את האינטגרל באמצעות גבול של סכומי רימן המתאימים לסדרת חלוקות נורמלית ולבחירת נקודות בכל תת קטע כרצוננו. נבחר סדרת חלוקות שוות נורמלית $\{T_n\}$ וכמו כן לכל חלוקה ובכל תת קטע נבחר נקודה השונה מ $\frac{1}{m}$ $\forall m\in\mathbb{N}$ (מדוע אפשר לבחור נקודות כאלה?) . לכל חלוקה שכזו סכום רימן המתאים יהיה אפס ולכן גם הגבול. מכאן, $\int_0^1 f(x)dx=0$.

<u>שאלה 5</u>

תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ המקיימת $\int_a^b f(x)dx>1$.

הוכיחו שקיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $f(x_0)>\frac{1}{b-a}$.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה שלכל $x\in\left[a,b\right]$ $f\left(x\right)\le\frac{1}{b-a}$ ונקבל ש $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b\frac{1}{b-a}dx=1$ בסתירה לנתון.

שאלה 6

מצאו את הפונקציה הקדומה של $f(x)=|x-1|$ בקטע $\left[0,2\right]$ המקבלת את הערך -1 ב $x=0$.

פתרון

בשלב ראשון נתעלם מכך שהשאלה עוסקת בקטע $\left[0,2\right]$. נתייחס לכך רק בסוף.

$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\ge1\\ 1-x & x\le1\end{cases}$. $\int(x-1)dx=\frac{(x-1)^2}{2}+C$ וכמו כן $\int(1-x)dx=\frac{-(1-x)^2}{2}+C$.

לכן מתבקש לנחש ש $\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{2}+C & x\ge1\\ \frac{-(1-x)^2}{2}+C & x\le1\end{cases}$ וזה אכן נכון. צריך רק לבדוק את הנגזרת ב $x=1$ לכל $C\in\mathbb{R}$ (שימו לב בפונקציה המפוצלת הקבוע C הוא אותו קבוע למעלה ולמטה אחרת לא תהיה לנו אפילו רציפות ובטח לא גזירות).

נקבע $C\in\mathbb{R}$ ונתבונן בפונקציה $F(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{2}+C & x\ge1\\ \frac{-(1-x)^2}{2}+C & x\le1\end{cases}$. גזרו לפי הגדרה וקבלו ש $F'(1)=0=f(1)$. לכן $F(x)$ אכן קדומה של $f(x)$. עפ"י הנתון צריך להתקיים $F(0)=\frac{-(1-0)^2}{2}+C=-1\Leftarrow C=-\frac{1}{2}$ ועכשיו גם אפשר להיזכר שדיברנו על הקטע $\left[0,2\right]$ ולקבל שהפונקציה הקדומה הדרושה היא $F(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{1}{2} & 2\ge x\ge1\\ \frac{-(1-x)^2}{2}-\frac{1}{2} & 0\le x\le1\end{cases}$.