פתרון הבוחן במתמטיקה בדידה למורים (88-610-01)

לפניך 3 שאלות. עליך לענות על כל השאלות.
משך הבוחן: 90 דקות.
חומר עזר: אסור.
לא לשכוח לרשום שם ות.ז.

שאלה 1 (30 נקודות)

הגדר 3 מתוך 4 המושגים הבאים:
- שיוויון קבוצות
- חיתוך קבוצות
- קבוצת החזקה
- יחס סימטרי

פתרון
- תהיינה A ו B קבוצות. נסמן $A=B$ כאשר:
  לכל $x\in A$ מתקיים $x\in B$ ולכל $x\in B$ מתקיים $x\in A$.
- תהיינה A ו B קבוצות. $A\cap B=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\in B\}$
- תהי A קבוצה. קבוצת החזקה של A, המסומנת $P(A)$, היא אוסף כל תתי הקבוצות של הקבוצה A.
- תהי A קבוצה ויהי R יחס מעל A. נאמר ש R יחס סימטרי אם $(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$

שאלה 2 (30 נקודות)

הוכח: ($A\subseteq C$ וגם $B\subseteq C$) $\Leftrightarrow$ $(A\cup B)\subseteq C$.

פתרון

בכיוון $\Leftarrow$: נתון ($A\subseteq C$ וגם $B\subseteq C$) וצריך להוכיח: $(A\cup B)\subseteq C$. ואכן:

$x\in A\cup B \Rightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow$ (בגלל הנתון) $x\in C\vee x\in C \Rightarrow x\in C$

בכיוון $\Rightarrow$: נתון $(A\cup B)\subseteq C$ וצריך להוכיח: $A\subseteq C$ וגם $B\subseteq C$. ואכן:

$x\in A \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in C$ ולכן מקבלים $A\subseteq C$

$x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in C$ ולכן מקבלים $B\subseteq C$

קיבלנו ש: $A\subseteq C$ וגם $B\subseteq C$.

<u>שאלה 3 (40 נקודות)</u>

נתונות קבוצה A ותת קבוצה $B \subseteq A$.
נגדיר יחס R על $P(A)$ ע"י :

$$R=\{(X,Y)\in P(A)\times P(A) \mid X\cap B=Y\cap B\}$$

א. הוכח ש- R יחס שקילות על $P(A)$.

ב. עבור: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3\}$, $X=\{1,3\}$, מצא את מחלקת השקילות של X.

<u>פתרון</u>

א. <u>רפלקסיביות:</u> לכל $X\in P(A)$: $X\cap B=X\cap B \quad \Leftarrow \quad (X,X)\in R$.

<u>סימטריות:</u> לכל $X,Y\in P(A)$:

$$(Y,X)\in R \Leftarrow Y\cap B=X\cap B \Leftarrow X\cap B=Y\cap B \Leftarrow (X,Y)\in R$$

<u>טרנזיטביות:</u> לכל $X,Y,Z\in P(A)$:

$$X\cap B=Y\cap B \Leftarrow (X,Y)\in R$$

$$Y\cap B=Z\cap B \Leftarrow (Y,Z)\in R$$

סה"כ מקבלים ש: $X\cap B=Z\cap B$ ולכן: $(X,Z)\in R$.

ב. עבור: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3\}$, $X=\{1,3\}$, נקבל ש: $X\cap B=\{3\}$. למעשה אנו מחפשים את כל הקבוצות $Y\in P(A)$ כך ש: $Y\cap\{3\}=\{3\}$ ונקבל: $[X]=\{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

<u>בהצלחה!</u>