תרגיל 1

(1. נתון: $|\vec{u}| = 10 \quad |\vec{v}| = 15 \quad |\vec{u}+\vec{v}| = 20$

לפי משפט הקוסינוס: $c^2 = a^2+b^2+2ab\cos\theta$

נציב ונקבל: $20^2 = 10^2+15^2+2\cdot 10\cdot 15\cdot \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{20^2-10^2-15^2}{2\cdot 10\cdot 15} = \frac{400-100-225}{300} = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0.25 \cong 75.52$$

(2. נתון: $|\vec{u}| = 15 \quad \alpha_1 = 30^\circ \quad \alpha_2 = 90^\circ$

$u_x = u\cos\theta$

$u_y = u\sin\theta$

$\vec{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y}$

א. במקרה α_1: $u_x = 15\cos 30 \cong 13$

$u_y = 15\sin 30 = 7.5$

ב. במקרה α_2: $u_x = 15\cos 90 = 0$

$u_y = 15\sin 90 = 15$

(3. נתון: $\vec{A} = 3\hat{x}+4\hat{y}-5\hat{z}$

$\vec{B} = -1\hat{x}+1\hat{y}+2\hat{z}$

א. $\vec{A}+\vec{B} = 3\hat{x}+4\hat{y}-5\hat{z}-1\hat{x}+1\hat{y}+2\hat{z} =$

$= (3-1)\hat{x}+(4+1)\hat{y}+(-5+2)\hat{z} =$

$= 2\hat{x}+5\hat{y}-3\hat{z}$

ב. $\vec{A}-\vec{B} = \vec{A}+(-\vec{B}) = 3\hat{x}+4\hat{y}-5\hat{z}-(-1\hat{x}+1\hat{y}+2\hat{z}) =$

$= (3+1)\hat{x}+(4-1)\hat{y}+(-5-2)\hat{z} =$

$= 4\hat{x}+3\hat{y}-7\hat{z}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

(6)

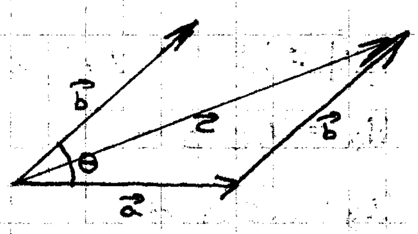
$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\cdot\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}} =$$

$$= \frac{(-1)\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot(-5)}{\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \frac{-3+4-10}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-9}{10\cdot\sqrt{3}} =$$

$$\cong -0.5196$$

$$\theta \cong 121.306$$

(4)



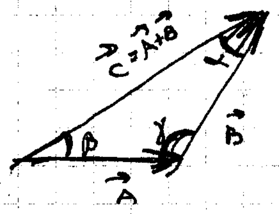
$$\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$$

$$c^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b} =$$

$$= a^2+b^2+2\vec{a}\vec{b} = a^2+b^2+2ab\cos\theta$$

$$c^2 = a^2+b^2+2ab\cos\theta$$ -משפט הקוסינוסים-

(5)



$$\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$$

$$\vec{C}\times\vec{C} = 0$$

$$\vec{C}\times\vec{C} = \vec{C}\times(\vec{A}+\vec{B}) = 0$$

$$\vec{C}\times\vec{A} + \vec{C}\times\vec{B} = 0$$

$$\vec{C}\times\vec{A} = -\vec{C}\times\vec{B} = \vec{B}\times\vec{C}$$

$$\cancel{C}A\sin\beta = B\cancel{C}\sin\alpha \qquad /:C$$

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta}$$

משפט הסינוסים-

(6)

$P=(1,2,3) \qquad Q=(4,5,6)$

עפ פיתגורס $D=\sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2+(6-3)^2} = 3\sqrt{3} \cong 5.196$

זהו אורכו של הוקטור המחבר בין שתי הנקודות:

$\vec{PQ} = (4-1)\hat{x}+(5-2)\hat{y}+(6-3)\hat{z}$

(7)

$\vec{A}=3\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z}$

א. $|\vec{A}| = \sqrt{3^2+1^2+2^2} = \sqrt{14} \cong 3.741$

ב. $\vec{A}' = 3\hat{x}+\hat{y} \qquad 2\hat{z}+\vec{A}' = \vec{A}$ וקטור במישור xy אין רכיב בכיוון z

$|\vec{A}'| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

ג. $\vec{B} = b_1\hat{x}+b_2\hat{y}$

$\vec{B}\circ\vec{A} = 0$

$|\vec{B}| = 1$

$$\begin{cases} b_1\cdot 3 + b_2\cdot 1 + 0\cdot 2 = 0 \\ \sqrt{b_1^2+b_2^2} = 1 \end{cases}$$

$b_2 = -3b_1$

$\sqrt{b_1^2+(-3b_1)^2} = 1$

$\sqrt{10b_1^2} = 1$

$\sqrt{10}\,b_1 = 1$

$b_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \cong \pm 0.316$

$b_2 = -3b_1 = -0.948$

$\vec{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{x} - \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{y}$

$B_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}}\hat{x} + \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{y}$

$a\circ b = ab\cos\alpha = 0$

8. המכפלה הסקלרית תתאפס כאשר $a=0$ או $b=0$ או $\cos\theta=0$

כלומר כאשר אורכם של אחד הוקטורים 0 או הזווית ביניהם $\theta=90$

אז $a \perp b$

(נקרא מאונך זה)

$a\times b = ab\sin\theta = 0$

המכפלה הוקטורית תתאפס כאשר $a=0$ או $b=0$ או $\sin\theta=0$

כלומר כאשר אורך אחד הוקטורים הוא 0 או הזווית ביניהם $\theta=0$

אז $a \parallel b$

(נקרא מקביל זה)

(9)

$$\vec{A} = 3\hat{x} + 4\hat{y} - 5\hat{z}$$
$$\vec{B} = -1\hat{x} + 1\hat{y} + 2\hat{z}$$

$\hat{x}\cdot\hat{x} = 1$

$\hat{y}\cdot\hat{y} = 1$

$\hat{z}\cdot\hat{y} = \hat{x}\cdot\hat{y} = 0$

$\hat{z}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{x} = 0$

$\hat{z}\cdot\hat{z} = 1$

$\hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{x}\cdot\hat{z} = 0$

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \vec{A}\cdot\vec{B} = (3\hat{x} + 4\hat{y} - 5\hat{z})\cdot(-1\hat{x} + 1\hat{y} + 2\hat{z}) =$$
$$= 3\hat{x}\cdot(-1)\hat{x} + 3\hat{x}\cdot 1\hat{y} + 3\hat{x}\cdot 2\hat{z} + 4\hat{y}\cdot(-1)\hat{x} + 4\hat{y}\cdot 1\hat{y} + 4\hat{y}\cdot 2\hat{z} -$$
$$- 5\hat{z}\cdot(-1)\hat{x} - 5\hat{z}\cdot 1\hat{y} - 5\hat{z}\cdot 2\hat{z} = (3\cdot -1) + (4\cdot 1) + (-5\cdot 2) = -9$$

מכפלה וקטורית $\otimes$

$\hat{x}\otimes\hat{x} = 0$

$\hat{y}\otimes\hat{y} = 0$

$\hat{z}\otimes\hat{z} = 0$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (3\hat{x} + 4\hat{y} - 5\hat{z})\times(-1\hat{x} + 1\hat{y} + 2\hat{z}) =$$
$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4\cdot 2 - (-5)\cdot 1)\hat{x} - (3\cdot 2 - (-5)(-1))\hat{y} +$$
$$+ (3\cdot 1 - 4\cdot(-1))\hat{y} = 13\hat{x} - 1\hat{y} + 7\hat{z}$$

$\hat{x}\otimes\hat{y} = \hat{z}$

$\hat{y}\otimes\hat{z} = \hat{x}$

$z\otimes x = \hat{y}$

$\hat{y}\otimes\hat{x} = -\hat{z}$

$\hat{z}\otimes\hat{y} = -\hat{x}$

$x\otimes z = -\hat{y}$

(10)

נתון:

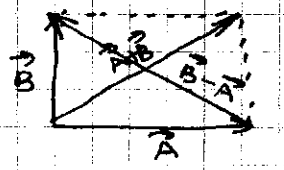
$$\vec{A}, \vec{B} \neq \vec{0}$$

צ"ל:

$$|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}| \Rightarrow A \perp B$$

הצעה:

$$(|\vec{A}+\vec{B}|)^2 = (\vec{A}+\vec{B})^2 = (\vec{A}-\vec{B})^2 = (|\vec{A}-\vec{B}|)^2$$
$$\Downarrow$$
$$\cancel{A^2} + \cancel{B^2} + 2\vec{A}\vec{B} = \cancel{A^2} + \cancel{B^2} - 2\vec{A}\vec{B}$$
$$4\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$4AB\cos\alpha = 0 \;;\; A, B \neq 0$$
$$\cos\alpha = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha = 90^0$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{A} \perp \vec{B}$$



* ניתן גם להראות
בדרך אלגברית שאם
אלכסוני מקבילית
(הסכום וההפרש)
שווים אזי המקבילית
הוא ריבוע
והצלעות ניצבות