תרגול 5

טורים מספרים

מטרת ההרצאה:

1. להגדיר סכום של סדרת מספרים $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.
2. להראות טכניקות לחישוב הסכום של סדרת מספרים $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.
3. להראות כיצד ניתן לקבוע האם סכום הסדרה מתכנס או מתבדר.

לפני שנגדיר סכום של סדרת מספרים $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ נראה דוגמה לסדרת מספרים ונחשב את סכומה.

דוגמה

נתבונן בסדרה הנדסית $3,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{8},...$ ונחשב את סכום הסדרה.

נתבונן בסדרה חדשה שבה האיבר הראשון הוא האיבר הראשון בסדרה הנתונה, האיבר השני הוא סכום שני האיברים הראשונים בסדרה הנתונה וכן הלאה...

ז"א $3,3+\frac{3}{2},3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4},3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8},....$ הסדרה הנ"ל נקרת סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה הנתונה.

נחשב את הגבול של סדרת הסכומים החלקים ונקבל את הסכום של סדרת המספרים.

תזכורת: סכום הסדרה של n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית שמנתה q הוא $S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

ואז הסדרה הנתונה היא $S_1,S_2,S_3,...S_n,...$ ז"א $3,\frac{3\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{1-\frac{1}{2}},\frac{3\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}{1-\frac{1}{2}},...\frac{3\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}},...$.

ולכן נשאר לחשב את הגבול $6=\frac{3\cdot 1}{1-\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$ נשים לב ש $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

הגדרה

הביטוי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+...$ נקרא טור אינסופי. האיבר a_n נקרא האיבר בכללי של הטור.

דוגמה

נתבונן בטור מהדוגמה הקודמת. האיבר הכללי הוא $a_n=\frac{3}{2^{n-1}}$ ולכן הטור האינסופי הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}$.

ראינו ש $6=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}$.

הגדרה

סכום n המחוברים הראשונים של טור נקרא סכום חלקי של הטור ומבוטא ע"י $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

דוגמה

נתבונן בטור מהדוגמה הקודמת $S_n = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + ... \frac{3}{2^{n-1}}$ שימו לב שניתן לסמן את הסכום ע"י $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2^{k-1}}$.

הגדרה

הגבול (אם הוא קיים) של סדרת הסכומים החלקיים $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ נקרא הסכום של הטור האינסופי.

אם גבול זה קיים והוא סופי, אז נאמר שהטור מתכנס. במקרה אחר הטור מתבדר.

דוגמה

נתבונן בטור מהדוגמה הקודמת $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + ... \frac{3}{2^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$.

תרגיל

חשב את סכום הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

פתרון

נשים לב ש $... + \frac{1}{4n^2-1} + ... + \frac{1}{4\cdot 4^2-1} + \frac{1}{4\cdot 3^2-1} + \frac{1}{4\cdot 2^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

בנוסף $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$.

נמצא את האיבר הכללי של סדרת הסכומים החלקיים

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 2-1} - \frac{1}{2\cdot 2+1} + \frac{1}{2\cdot 3-1} - \frac{1}{2\cdot 3+1} + \frac{1}{2\cdot 4-1} - \frac{1}{2\cdot 4+1} + ... \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 2-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

נחשב את גבול הסדרה.

מכיוון ש $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ נקבל ש $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{6}$.

סיכום

ראינו שכדי לחשב את הסכום של טור אינסופי יש לבצע את הפעולות הבאות:

1. למצוא נוסחה לחישוב n האיברים הראשונים ולסמנה ב S_n. (ז"א האיבר הכללי בסדרת הסכומים החלקיים).
2. לחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n$.

מבחני התכנסות של טורים מספריים

בניגוד לחלק הקודם שבו חישבנו את סכום הטור האינסופי בחלק זה נלמד טכניקות לקביעת התכנסות הטור.
במסגרת הקורס אנחנו נלמד כיצד לקבוע התכנסות של טור בעזרת מבחני התכנסות.

נזכיר שהטור מתכנס כאשר הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n$ קיים וסופי והטור מתבדר כאשר הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n$ לא קיים או שהוא לא סופי.

דוגמה 1

נתבונן בסדרת המספרים הקבועה $1,1,1,1,1....,1,...$ אם נחבר את n האיברים הראשונים נקבל $S_n = n$ ואז $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ ולכן הטור מתבדר.

דוגמה 2

קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ מתבדר או מתכנס.

פתרון

נחשב את האיבר הכללי בסדרת הסכומים החלקיים ז"א נחשב את S_n.

$$S_n = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\ln\left(\frac{1+1}{1}\right)+\ln\left(\frac{2+1}{2}\right)+\ln\left(\frac{3+1}{3}\right)+\ln\left(\frac{4+1}{4}\right)+...+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=$$
$$=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+(\ln 5-\ln 4)+...+(\ln(n+1)-\ln n)=$$
$$=\ln(n+1)$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\ln(n+1)\right)=\infty$ ז"א הטור האינסופי מתבדר.

משפט

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

הערה

ההפך לא בהכרח נכון ז"א אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז לא בהכרח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ראינו בדוגמה 2 שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ מתבדר, אבל $\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=0$.

דוגמה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n}$ מתבדר מכיוון ש $\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1\neq 0$.

תרגיל

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n^2}$ מתכנס?

פתרון

$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n^2}=1$ ולכן הטור מתבדר.