אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 10

להגשה עד 28.1.20

הגדרה: יהי X מרחב לינארי נורמי. נאמר שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת (בנורמה) ל־$x_0 \in X$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$.

שאלה 1

האם הפונקציות הבאות מגדירות נורמה על המרחב $BV([a,b])$? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

1. $\|f\| = T_a^b(f)$
2. $\|f\| = |f(a)| + T_a^b(f)$

שאלה 2

יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ מרחב מידה חיובית. נאמר שסדרת פונקציות f_n מתכנסת במידה לפונקציה f אם לכל $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$.

1. הוכיחו כי התכנסות ב־L^1 גוררת התכנסות במידה.
2. האם התכנסות במידה גוררת התכנסות ב־L^1?

שאלה 3

יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ מרחב מידה חיובית. תהי $f_n : X \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות ממשיות מדידות המתכנסת כמעט בכל מקום ל־f. נניח שעבור $p \in [1, \infty)$ קיימת $g \in L^p(X)$ כך שלכל n, $|f_n| \leq g$ כמעט בכל מקום. הוכיחו כי $f, f_n \in L^p(X)$, וכן כי $f_n \to f$ ב־$L^p(X)$.

שאלה 4

יהי $p \in [1, \infty)$, ותהי $f \in L^p(X)$. הוכיחו כי המידה של הקבוצה $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ היא σ־סופית (כלומר איחוד בן־מניה של קבוצות ממידה סופית).