הגדרה

$\boldsymbol{a_n} \to \infty$ אם לכל M ממשי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $M < a_n$. (בפירוט: לכל M, יש N, כך שלכל $n > N$: $M < a_n$)

$a_n \to -\infty$ אם לכל M ממשי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n < M$.

הערה

עבור a ממשי, $a_n \to a$ אם לכל סביבה $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ של a, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים ש a_n שייך לסביבה.

אם נסמן, עבור מספר ממשי M: $(M,\infty) \coloneqq \{x: M < x\}, (-\infty, M) \coloneqq \{x: x < M\}$

וקבוצות כאלה יקראו סביבה של ∞ / סביבה של $-\infty$ (בהתאמה) אז $a_n \to \infty$ פירושו שלכל סביבה של ∞, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ כל a_n נמצא בסביבה. (ובדומה עבור $a_n \to -\infty$)

דוג'

$a_n \coloneqq n$ לכל n.

$a_n \to \infty$: יהי נתון M. ניקח $N \leq M$. לכל $n > M$, מתקיים $M < n \coloneqq a_n$

דוג'

$a_n \coloneqq -n$ לכל n. $a_n \to -\infty$ (תרגיל: לבדוק!)

למה

אם $c > 0$ ו- $a_n \to \infty$ אז $c \cdot a_n \to \infty$ (לא פורמאלית: $c \cdot \infty = \infty$)

הוכחה

יהי M ממשי נתון. יש למצוא קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$: $c \cdot a_n > M$, ז"א (כיוון ש $c > 0$) $\frac{1}{c} \cdot M < a_n$. נתון ש - $a_n \to \infty$, לכן, עבור המספר הממשי $\frac{1}{c} \cdot M$ לכל $n \geq M$ $a_n > \frac{1}{c} \cdot M$. N זה נותן את הדרוש ■

הערה

אם $c < 0$, $a_n \to \infty$, אז $c \cdot a_n \to -\infty$.

אם $c > 0$, $a_n \to -\infty$, אז $c \cdot a_n \to -\infty$

אם $c < 0$, $a_n \to -\infty$ אז $c \cdot a_n \to \infty$

אינטואיטיבית:

$$\infty \cdot a_{>0} = \infty$$

$$\infty \cdot a_{<0} = -\infty$$

$$-\infty \cdot a_{>0} = -\infty$$

$$-\infty \cdot a_{<0} = \infty$$

דוגמה

"$0 \cdot \infty$"

יכול להיות כל דבר, ולכן אינו מוגדר (אפילו אינטואיטיבית)

$$0_{\to 0} \cdot n_{\to\infty} \to 0$$

$$\left(\frac{x}{n}\right)_{\to 0} \cdot n_{\to\infty} \to x$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{\to 0} \cdot n^2_{\to\infty} = n \to \infty$$

$$\left(-\frac{1}{n}\right)_{\to 0} \cdot n^2_{\to\infty} = (-n) \to -\infty$$

$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{\to 0} \cdot n_{\to\infty} = (-1)^n \nrightarrow \text{כלום}$$

למה

אם $a_n \to \infty$ והסדרה b_n חסומה, אז $a_n + b_n \to \infty$.

הוכחה

יהי M מספר ממשי. נחפש N שאחריו $M < a_n + b_n$. ז"א $a_n > M - b_n$. הסדרה b_n חסומה, לכן יש ממשי r כך של $r > |b_n|_{\geq -b_n}$ לכן $M - b_n \leq M + |b_n| < M + r$ לכן, מספיק שיש N שאחריו $M + r < a_n$. מההגדרה $a_n \to \infty$ (עם המספר $M + r$ כחסם נתון), יש N כזה.■

למה

אם $a_n \to \infty$, אז $\frac{1}{a_n} \to 0$ (אינטואיטיבית: $\frac{1}{\infty} = 0$).

הוכחה

ראשית נשים לב שכיוון ש $a_n \to \infty$, בפרט יש N שאחריו $a_n > 0$. לכן, פרט לכל היותר למס' סופי של איברים, הסדרה $\frac{1}{a_n}$ מוגדרת (והגבול אינו תלוי במספר סופי של איברים בתחילת הסדרה). יהי $\epsilon > 0$. יש למצוא N שאחריו $\underbrace{\left|\frac{1}{a_n} - 0\right|}_{=\frac{1}{|a_n|}} < \epsilon$.

ניקח N_1 שאחריו $a_n > 0$. עבור $n > N_1$, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{|a_n|}$ ודרוש $\frac{1}{a_n} < \epsilon$, ז"א ($0 < a_n, \epsilon$) $\frac{1}{\epsilon} < a_n$.
$a_n \to \infty$, לכן יש N_2 שאחריו $a_n > \frac{1}{\epsilon}$. ניקח $N := \max\{N_1, N_2\}$ לכל $n > N$: כיוון ש$n > N_1$, מתקיים $a_n > 0$ (בדיעבד, נובע מההמשך) וכיוון ש - $n > N_2$, מתקיים $a_n > \frac{1}{\epsilon}$. כלומר: $0 < a_n, \epsilon$

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| =_{a_n > 0} = \frac{1}{a_n} < \epsilon \quad \blacksquare$$

הערה

"$\frac{1}{0}$" לא ניתן לפרשנות עקבית. למשל:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)_{\to 0}} = n \to \infty, \quad \frac{1}{\left(\frac{-1}{n}\right)_{\to 0}} = -n \to -\infty$$

$$\frac{1}{\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{\to 0}} = (-1)^n \not\to \text{כלום}$$

למה

אם $0 < a_n \to 0$, אז $\frac{1}{a_n} \to \infty$ ("$\frac{1}{0^+} = \infty$").

הוכחה

יהי M ממשי נתון. דרוש N שאחריו $\frac{1}{a_n} > M$. אם $M \le 0$ אז $\frac{1}{a_n} \ge 0 \ge M$ לכל n וסיימנו. נניח אפוא $M > 0$ (לחילופין, נחפש קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge N$ $\frac{1}{a_n} + |M| = M'$). דרוש $\frac{1}{a_n} > M$, ז"א $(0 < M, a_n)$, $\frac{1}{M} > a_n >_{\text{נתון}} 0$. ניקח $\epsilon := \frac{1}{M}$. $a_n \to 0$, לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge N$

$$a_n =_{a_n > 0} |a_n| = |a_n - 0| < \epsilon = \frac{1}{M}$$

וזה מה שרצינו להוכיח.

$\blacksquare$

הערה

$''\frac{1}{0^-}=-\infty''$: אם $0>a_n\to 0$, אז $\frac{1}{a_n}\to-\infty$

הוכחה א': בדומה להוכחה הקודמת.

הוכחה ב': $0<-a_n\to-0=0$ ולכן $\frac{1}{-a_n}\to\infty$, ולכן

$$\underbrace{(-1)}_{\text{קבוע שלילי}}\cdot\underbrace{\frac{1}{-a_n}}_{\to\infty}\xrightarrow{\text{למה קודמת}}-\infty$$

למה

אם הסדרה a_n עולה ואינה חסומה מלעיל, אז $a_n\to\infty$.

הוכחה

יהי M נתון. הסדרה אינה חסומה מלעיל, לכן קיים k כך ש $M<a_n$. לכל $n>k$, $a_n\ \underset{\text{הסדרה עולה}}{\geq}\ a_k>M$. מצאנו איפוא k שאחריו מתקיים $M<a_n$.

בדומה אם a_n יורדת ולא חסומה מלרע, אז $a_n\to-\infty$.

הגדרה

אם $a_n\to a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, אומרים שהסדרה a_n **מתכנסת במובן הרחב**.

הגדרה

סדרה היא **סדרה מונוטונית** אם היא עולה או יורדת.

דוגמה

סדרה: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$

תת סדרה: $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{100},..$

הגדרה

תת סדרה של a_n היא סדרה מהצורה $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$ עבור $m_1<m_2<m_3<\cdots$ מספרים טבעיים.

משפט (בולצנו - ויירשטרס)

לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

הוכחה

תהי a_n סדרה חסומה. נאמר שאיבר בסדרה a_m היא נקודת שיא אם לכל $n > m$ מתקיים

$a_m \geq a_n$

אפשרות א׳: יש בסדרה אינסוף נקודות שיא

נמספר אותן בסדר עולה: $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots (m_1 < m_2 <..)$

אזי $a_{m_1} \geq a_{m_2} \geq a_{m_3} \geq \cdots$ הסדרה יורדת וחסומה ולכן מתכנסת.

אפשרות ב׳: אפשרות א׳ אינה מתקיימת, כלומר: יש רק מספר סופי של נקודות שיא בסדרה. ניקח m_1 שגדול מכל המקומות בסדרה שיש בהם נקודת שיא. a_{m_1} אינו נקודת שיא, ז״א יש $m_1 < m_2$ כך ש $a_{m_1} < a_{m_2}$. a_{m_2} אינו נקודת שיא $(m_1 < m_2)$, לכן יש $m_2 < m_3$ כך ש - $a_{m_2} < a_{m_3}$ וכו׳ וכך נקבל תת סדרה עולה וחסומה ולכן מתכנסת.

■