

אלגברה לינארית להנדסה בר-אילן
מועד א' התשע"דד"ר מיטל אליהו רובינסון.
מתרגלים : אחיה בראון, גילי גולן.

זמן הבחינה : 3 שעות.

תכננו את הזמן של הבחינה!!! אל תבזבזו זמן יקר על שאלה מסויימת!יש לכתוב את הפתרון מתחת לכל שאלה. המחברת תשמש כטיטה בלבד ולא תיבדק.
מותר להשתמש במחשבוניו מדעיים פשוטים בלבד!
ניתן לצבור לכל היותר 110 נקודות בבחינה אך הציון המרבי הוא 100.

הערה: כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
חלק א' : הוכחות שאלות 1-2	
חלק ב' : אמריקאיות שאלות 3-7	
8	
9	
10	
סה"כ	

בס"ד

חלק א' - יש לענות כאן!!!

פתרו **אחת** משתי השאלות הבאות : (20 נק')

1. יש להוכיח את **שתי** הטענות:
 - א. משפטון ההחלפה של שטייניץ (ניסוח + הוכחה).
 - ב. אי שוויון המשולש לנורמה המושרית מ"פ.
2. משפט ההגדרה להעתקות לינאריות. (להוכיח שאכן קיימת הע"ל יחידה...)

חלק ב' (30 נקודות)

סמנו את תשובותיכם בעיגול.

3. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה מסדר $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- א. $(-1)^{n-1}(2n-1)$
- ב. $(-1)^{2n-1}(3 \cdot 2^{n-3})$
- ג. $3n^2 - 7n - 1$
- ד. $4n^2 - 12n + 5$

4. תהי A מטריצה כך שבצורה המדורגת שלה יש שורת אפסים. למערכת $Ax = 0$.

- א. יש רק פתרון אחד.
- ב. אין שום פתרון.
- ג. יש יותר מפתרון אחד.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת בוודאות.

5. יהי $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס למרחב וקטורי. נביט על הקבוצה.

$$C = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3 - v_2\}$$

איזה מהטענות הבאות נכונה?

- א. C תמיד פורשת ובת"ל ולכן היא בסיס.
- ב. C תמיד פורשת אבל לא בהכרח בת"ל ולכן היא לא בהכרח בסיס.
- ג. C תמיד בת"ל אבל לא בהכרח פורשת ולכן היא לא בהכרח בסיס.
- ד. C לא בהכרח פורשת ולא בהכרח בת"ל ולכן היא לא בהכרח בסיס.

6. נגדיר: $V = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{tr}(A) = 0\}$ (כלומר סכום איברי האלכסון = 0)

מהו $\dim(V)$?

- א. $\frac{n(n-1)}{2}$
- ב. $n^2 - n$
- ג. $n^2 - 1$
- ד. V בכלל לא תת מרחב וקטורי.

בס"ד

7. תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מטריצה שכל ערכיה שלמים ו $\det A = 7$. בנוסף יהי $b \in \mathbb{R}^3$ וקטור

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

שכל ערכיו שלמים. נבנה מערכת משוואות

איזה מהמספרים הבאים עשוי להיות (עבור בחירה מתאימה של A, b) הערך של x ?

א. $1/2$

ב. $2/3$

ג. $5/6$

ד. אף אחד מבין א, ב, ג, לא יכול להיות הערך של x .

חלק ג' (60 נק') - יש לענות מתחת לכל שאלה.

8. נתונה המטריצה: $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

- א. מצאו פולינום אופייני וע"ע של A .
- ב. מצאו בסיס למרחב העצמי של כל אחד מהע"ע.
- ג. האם המטריצה לכסינה? נמקו! - אם כן - מצאו את המטריצה האלכסונית D וההפיכה P , אם לא-נמקו לפי משפטים שלמדנו בכיתה.
- ד. - לא קשור לסעיפים הקודמים: תהי $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. הוכיחו כי כל הע"ע של המטריצה $B^t B$ הם חיוביים ($\lambda \geq 0$)

9. יהי $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. נגדיר העתקה $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $T(v) = \langle v, w \rangle$ (המכפלה

הפנימית של v, w)

א. מצאו את $[T]$ - המטריצה המייצגת שלה. (זו בסה"כ שורה!)

ב. מצאו בסיס לגרעין ולתמונה של T .

ג. האם T היא איזומורפיזם? הסבירו!

10. יהי $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (מרחב מטריצות) עם מכפלה פנימית: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$

(להזכירכם: tr משמעותו סכום איברי האלכסון).

$$. \text{ תהי } Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \in V$$

א. חשבו את $\det Q$

ב. הוכיחו כי לכל $A \in V$ מתקיים כי $\|AQ\| = \|A\|$