לינארית 1 (88112), סמטסטר קיץ תשפ,מועד ב'

מרצים: מר אחיה בר-און, מר בארי גרינפלד, ד"ר אליהו מצרי, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: ניקול בלשוב, אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, יפעת חדד, נועה כהן, גלעד פורת-קורן, זהבה צבי, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 6 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 106. ציון מעל 100 יעוגל ל 100 (חלק א 70 נקודות וחלק ב 36 נקודות)
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

חלק א

1. תהא

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

מטריצה. ונקל על החישובים ונספר לכם ש:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיס ל $N(A)$
(ב) השלימו את הבסיס מהסעיף הקודם לבסיס של $N(A^3)$.
(ג) מצאו בסיס ל $C(A^3) + C(A)$.
(ד) מצאו וקטור ב $C(A)$ שאינו שייך ל $C(A^2)$.

2. תהא

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & a+2 \\ 6a-4 & 2-a & 4-6a \\ -2a-4 & 0 & 3a+2 \end{pmatrix}$$

מטריצה ממשית מגודל 3×3 ויהיו

$$b_1 = \begin{pmatrix} a+3 \\ a-3 \\ a+5 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2a-4 \\ 6-a \\ 3a-5 \end{pmatrix}$$

שני וקטורי עמודה ממשיים מגודל 3×1.

(א) מצאו לאילו ערכי a למערכת $A^3x = b_1$ אין פתרון יחיד (כלומר מתי יש אינסוף פתרונות או שאין פתרון כלל).

(ב) מצאו לאילו ערכי a למערכת $A^2x = b_2$ אין פתרון.

(ג) מצאו לאילו ערכי a למערכת $Ax = b_2$ יש אינסוף פתרונות.

3. תהא $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ מטריצה ויהיו

$$E_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

מטריצות אלמנטריות. נתון כי מתקיים

$$E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את A.

(ב) חשבו את המימד של $R\left(A^tE_3^{-1}\right)$

4. תהא $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, המקיימת כי $[T]_C^B = I$ כאשר

$$B = \left\{-1 + 2x, -2x - x^2, 1 + x + x^2\right\}$$
$$C = \left\{x, 1 - 5x - x^2, -2 + 6x + x^2\right\}$$

שני בסיסים (סדורים) של $\mathbb{R}_2[x]$ (ו I היא מטריצת היחידה מגודל 3×3)

(א) חשבו את $T\left(-2 + 6x + x^2\right)$.

(ב) חשבו את $T^{-1}\left(1 + 2x + 3x^2\right)$

(ג) נתונה העתקה $S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י משפט ההגדרה כך:

$$S(1 - 5x - x^2) = -2x - x^2$$
$$S(-2 + 6x + x^2) = -1 + 2x$$
$$S(x) = 3 - 8x - x^2$$

מצאו בסיס D (של $\mathbb{R}_2[x]$) כך שבמטריצה מהייצגת $[S]_D^D$ יש עמודת אפסים ויש שורת אפסים.

(ד) עבור העתקה S מהסעיף הקודם, מצאו בסיס ל $\ker TS$ (הגרעין של TS).

(ה) עבור העתקה S מהסעיף הקודם, מצאו בסיס ל $\mathrm{Im}ST$ (התמונה של ST).

חלק ב

5. נגדיר $W = \left\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid \sum_{j=1}^n C_j(A) = 0\right\}$ קבוצת המטריצות שסכום כל העמודות שווה לעמודת אפסים.

(א) הוכיחו שזהו תת מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$ ומצאו את מימדו.

(ב) הוכיחו/הפריכו: לכל $A, B \in W$ גם $A \cdot B \in W$

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל $A, B \in W$ מתקיים כי $\dim\left(N(A) \cap N(B)\right) \geq 1$

6. יהא V מ"ו ויהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ ת"ל נסמן Q את קבוצת כל הוקטורים $v \in V$ המקיימים כי $v_1 + v, \ldots, v_n + v$ ת"ל.

(א) הוכיחו/הפריכו: מתקיים כי $\mathrm{span}\left\{v_1, \ldots, v_n\right\} \subseteq Q$

(ב) הוכיחו/הפריכו: Q הינו ת"מ.

במידה ותבחרו להגיש את חלק ב לבדיקה, ייתכן שתוזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על חלק ב").

במידה ותבחרו לא להגיש את חלק ב לבדיקה, תקבלו עליה 14 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על חלק ב").