פתרון תרגיל בית 13 באלגברה מופשטת
88-211 סמסטר א' תשע"ו

שאלה 1. מצאו סדרת הרכב ל-D_4. הסיקו ש-D_4 פתירה.

פתרון. החבורה D_4 היא חבורת-2 סופית. כבר ראינו שלחבורות כאלו יש תת־חבורות מכל חזקה של 2 שמחלקת את סדר החבורה. האינדקס בין כל תת־חבורה בסדרה יהיה 2, ולכן הן נורמליות.

אנחנו מכירים כבר את כל תת־החבורות של D_4. עבור סדרת הרכב נוכל לבחור את $D_4 \rhd \langle\sigma\rangle \rhd \langle\sigma^2\rangle \rhd \{\mathrm{id}\}$. האם אתם יכולים למצוא עוד סדרות הרכב?

הגורמים בסדרת ההרכב כולם מסדר 2, ולכן כולם איזומורפיים לחבורה האבלית $\mathbb{Z}_2$, ולכן D_4 פתירה.

שאלה 2. הוכיחו או הפריכו:

א. כל חבורה מסדר 1089 היא פתירה.

ב. כל חבורה מסדר 60 היא פתירה.

פתרון. א. (הופיע בתרגול) נשים לב כי $|G| = 1089 = 3^2 \cdot 11^2$. לכן לפי משפט סילו 3 נקבל כי $n_{11}|3^2$ וגם $n_{11} \equiv 1 \pmod{11}$. לכן בהכרח $n_{11} = 1$. כלומר קיימת תת־חבורת 11-סילו P יחידה, והיא נורמלית. הסדר של P הוא 11^2, ולכן היא אבלית. הסדר של חבורת המנה G/P הוא 3^2 ולכן היא גם אבלית. כלומר בסדרה הנורמלית $G \rhd P \rhd \{e\}$ כל הגורמים הם אבליים, ולכן היא נורמלית.

ב. ראינו בכיתה כי A_5 היא חבורה פשוטה ולא אבלית, וש-$|A_5| = 60$. כלומר אין לה אף תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית, ולכן בכל סדרה נורמלית של A_5 הגורם A_5 (שאינו אבלי כאמור) תמיד מופיע, והוא אפילו הגורם היחיד שיופיע. לכן A_5 לא פתירה.

שאלה 3. ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי G חבורה בת 35 איברים, הוכיחו כי G פתירה.

ב. תהי G חבורה בת 125 איברים. האם בהכרח G פתירה?

פתרון. א. נשים לב כי $35 = 5 \cdot 7$. לכן לפי משפט סילו 3 נקבל כי $n_7|5$ וגם $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$. לכן בהכרח $n_7 = 1$. כלומר קיימת תת־חבורת 7-סילו P יחידה, והיא נורמלית. הסדר של P הוא 7, ולכן היא אבלית. הסדר של חבורת המנה G/P הוא 5 ולכן היא גם אבלית. כלומר בסדרה הנורמלית $G \rhd P \rhd \{e\}$ כל הגורמים הם אבליים, ולכן היא נורמלית.

ב. חבורה מסדר 125 היא חבורת-5. חבורות-p סופיות הן תמיד נילפוטנטיות, ולכן פתירות. אפשר לראות במקרה הספציפי הזה, שהמרכז Z של החבורה מסדר 125 הוא לא טריוויאלי. המרכז הוא תת־חבורה נורמלית. אם Z הוא כל החבורה, אז החבורה אבלית, ולכן פתירה. אחרת, המנה ביחס למרכז היא חבורה מסדר 5^2, ולכן אבלית. גם כאן נקבל שהחבורה פתירה.

שאלה 4. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2006) על הקבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ נגדיר את הפעולה הבאה: $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1+b_1a_2,b_1b_2)$. הוכיחו:

א. $G=(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\cdot)$ חבורה.

ב. G אינה אבלית.

ג. קיים מונומורפיזם $G\to GL_2(\mathbb{R})$.

ד. G חבורה פתירה. רמז: השתמשו בסעיף הקודם ובחישוב קומוטטורים.

פתרון. א. סגירות הפעולה די ברורה: עבור $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ מתקיים ש-$(a_1+b_1a_2,b_1b_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ כי $b_1b_2\neq 0$ וכי $a_1+b_1a_2\in\mathbb{R}$.
את קיבוציות הפעולה נוכיח בחישוב ישיר:

$$\begin{aligned}((a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2))\cdot(a_3,b_3)&=(a_1+b_1a_2,b_1b_2)\cdot(a_3,b_3)\\&=(a_1+b_1a_2+b_1b_2a_3,b_1b_2b_3)\\&=(a_1,b_1)\cdot(a_2+b_2a_3,b_2b_3)\\&=(a_1,b_1)\cdot((a_2,b_2)\cdot(a_3,b_3))\end{aligned}$$

איבר היחידה בחבורה הוא $e=(0,1)$. אכן לכל $(a,b)\in G$ מתקיים

$$(a,b)\cdot(0,1)=(a+b\cdot 0,b\cdot 1)=(a,b)=(0+1\cdot a,1\cdot b)=(0,1)\cdot(a,b)$$

וההופכי של (a,b) הוא האיבר $\left(-ab^{-1},b^{-1}\right)$, שמוגדר היטב כי $b\neq 0$. מספיק לבדוק הפיכות משמאל לכל איבר:

$$\left(-ab^{-1},b^{-1}\right)\cdot(a,b)=\left(-ab^{-1}+b^{-1}a,b^{-1}b\right)=(0,1)$$

ב. "כמעט כל" זוג איברים שנבחר לא יתחלף. למשל

$$(1,2)\cdot(3,3)=(7,6)\neq(6,6)=(3,3)\cdot(1,2)$$

ג. נגדיר מונומורפיזם $f:G\to GL_2(\mathbb{R})$ לפי

$$f(a,b)=\begin{pmatrix}b&a\\0&1\end{pmatrix}$$

ומפני ש-$b\neq 0$, אז המטריצה לעיל אכן שייכת ל-$GL_2(\mathbb{R})$. ברור ש-f חח"ע. נותר להראות שהיא הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}f((a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2))=f(a_1+b_1a_2,b_1b_2)&=\begin{pmatrix}b_1b_2&a_1+b_1a_2\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}b_1&a_1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_2&a_2\\0&1\end{pmatrix}=f(a_1,b_1)\cdot f(a_2,b_2)\end{aligned}$$

ד. לפי הסעיף הקודם, מספיק להראות שהחבורה (שהפעולה בה היא כפל מטריצות)

$$H=\left\{\begin{pmatrix}b&a\\0&1\end{pmatrix}:a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}^*\right\}$$

היא פתירה, כי $G\cong\mathrm{im}(f)=H$. בכיתה כבר ראינו כי

$$H\cong\left\{\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}:a\in\mathbb{R}\right\}\rtimes\left\{\begin{pmatrix}b&0\\0&1\end{pmatrix}:b\in\mathbb{R}^*\right\}$$

וניתן לבדוק כי

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}$$

כלומר H' אבלית, ולכן $H^{(2)} = \{e\}$. בכל מקרה, מכפלה ישרה למחצה של חבורות אבליות היא פתירה.

שאלה 5. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2006) נסמן $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ הקומוטטור של $a,b \in G$ בחבורה G.

נגדיר $G' = \langle \{[a,b] \,|a,b \in G\} \rangle$ תת־החבורה שנוצרת על ידי הקומוטטורים. הוכיחו:

א. $G' \lhd G$.

ב. G/G' אבלית.

ג. אם $f : G \to Y$ הומומורפיזם ו-Y אבלית אז $G' \subseteq \ker f$.

פתרון. א. אפשר להוכיח לפי זה ש-$g\,[a,b]\,g^{-1} = \left[gag^{-1}, gbg^{-1}\right]$ לכל $a,b \in G$. ראינו כי $[a,b]^{-1} = [b,a]$, ולכן כל איבר ב-G' הוא מכפלה של קומוטטורים. לכן אם

$$x = [a_1,b_1]\,[a_2,b_2]\dots[a_k,b_k] \in G'$$

אז הצמדת איבר זה ב-$g \in G$ היא

$$\begin{aligned} gxg^{-1} &= g\,[a_1,b_1]\,g^{-1}g\,[a_2,b_2]\,g^{-1}\dots g\,[a_k,b_k]\,g^{-1} \\ &= \left[ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}\right]\left[ga_2g^{-1}, gb_2g^{-1}\right]\dots\left[ga_kg^{-1}, gb_kg^{-1}\right] \in G' \end{aligned}$$

תת־חבורת הקומוטטור מקיימת למעשה תנאי חזק הרבה יותר מנורמליות. לכל הומומורפיזם $f : G \to H$ מתקיים

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

להוכחת הנורמליות של G' מספיק להראות שתנאי זה מתקיים לכל אוטומורפיזם פנימי של G.

ב. יהיו איברים $xG', yG' \in {}^{G}\!/\!_{G'}$ בחבורת המנה. נשים לב ש-$[x,y]\,G' = G'$ כי $[x,y] \in G'$. לכן

$$(xG')\,(yG') = xyG' = G'xy = G'\,[x,y]\,yx = G'yx = yxG' = (yG')\,(xG')$$

כאשר השתמשנו בנורמליות של G' ובזהות $xy = [x,y]\,yx$. לכן xG', yG' מתחלפים, וזה נכון לכל זוג איברים באבליניזציה.

ג. לכל $a,b \in G$ מתקיים ש-$f(a)f(b) = f(b)f(a)$ כי Y אבלית. לכן

$$f(ab) = f(a)f(b) = f(b)f(a) = f(ba)$$

ולכן $f(aba^{-1}b^{-1}) = e_Y$. כלומר $[a,b] \in \ker f$. מפני ש-$\ker f$ היא חבורה, ולכן סגורה, אזי $G' \leq \ker f$. בפרט G' מוכלת ב-$\ker f$.

שאלה 6. ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את $(A_4)'$.

ב. מצאו את $(S_4)'$.

פתרון. א. נזכר כי חבורת קליין V_4 היא תת־חבורה נורמלית של A_4. מתקיים כי $|{}^{A_4}/_{V_4}| = 3$, ולכן חבורת המנה הזו אבלית. לכן $(A_4)' \leq V_4$. החבורה A_4 אינה אבלית, ולכן $(A_4)' \neq \{\mathrm{id}\}$. מכאן שהאפשרות היחידה היא $(A_4)' = V_4$.

ב. ראינו שאם $H \leq G$, אז $H' \leq G'$. לכן $(A_4)' \leq (S_4)'$. המנה ${}^{S_4}/_{A_4}$ היא אבלית (למה?), ולכן $(S_4)' \leq A_4$. כלומר יש שתי אפשרויות שיש לבדוק: V_4 ו-A_4. בחישוב ישיר רואים כי

$$[(1\ 2\ 3)\,,(1\ 2)] = (1\ 2\ 3)\,(1\ 2)\,(1\ 3\ 2)\,(1\ 2) = (1\ 3\ 2)$$

ולכן $(1\ 3\ 2) \in (S_4)'$. מפני ש-$(S_4)' \lhd S_4$, אז היא מכילה את כל התמורות עם אותו מבנה מחזורים של האיברים בה (בכיתה הראנו שתת־חבורה נורמלית היא איחוד של מחלקות צמידות). לכן כל המחזורים מאורך 3 נמצאים ב-$(S_4)'$, ולכן $(S_4)' = A_4$.

שאלה 7. הוכיחו שכל חבורה מסדר 88 היא פתירה.

פתרון. נשים לב ש-$88 = 2^3 \cdot 11$. לכן לפי משפט סילו 3 נקבל כי $n_{11}|8$ וגם $n_{11} \equiv 1 \pmod{11}$. לכן בהכרח $n_{11} = 1$. כלומר קיימת תת־חבורת 11-סילו P יחידה, והיא נורמלית. הסדר של P הוא 11, שהוא ראשוני, ולכן $P \cong \mathbb{Z}_{11}$. כלומר P היא אבלית, ולכן פתירה. חבורת המנה ${}^{G}/_{P}$ היא חבורת-2, ולכן היא פתירה. מפני שגם P וגם ${}^{G}/_{P}$ פתירות, אז G פתירה.

שאלה 8. יהיו A, B חבורות נילפוטנטיות. הוכיחו:

א. לכל $K \leq A$, K נלפוטנטית.

ב. לכל $K \trianglelefteq A$, A/K נלפוטנטית.

ג. $A \times B$ נלפוטנטית.

פתרון. א. נסמן את הסדרה המרכזית היורדת של חבורה G ב-$(G_n)_n$, כאשר $G_0 = G$ ו-$G_n = [G, G_{n-1}]$ עבור $n > 0$. ידוע לנו שקיים $m < \infty$ כך ש-$A_m = \{e\}$. נשים לב כי $K_i \leq A_i$ לכל i. לכן $K_m = \{e\}$, ולכן K נילפוטנטית.

ב. ישנו אפימורפיזם $\varphi : A \to {}^{A}/_{K}$. לכל הומומורפיזם $f : G \to H$ ותת־קבוצה $S \subseteq G$ מתקיים $f\left(\langle S \rangle\right) = \langle f(S) \rangle$ (ודאו שאתם יודעים להוכיח זאת). כמו בסעיף הקודם, ידוע לנו שעבור m כלשהו $A_m = \{e_A\}$. אפשר להראות כי $({}^{A}/_{K})_i \leq \varphi\left(A_i\right)$. בפרט $({}^{A}/_{K})_m = \varphi\left(A_m\right) = \left\{e_{A/K}\right\}$, ולכן ${}^{A}/_{K}$ היא נילפוטנטית.

ג. נשים לב כי עבור $a_1, a_2 \in A$ ו-$b_1, b_2 \in B$ מתקיים ש-

$$[(a_1, b_1)\,, (a_2, b_2)] = ([a_1, a_2]\,, [b_1, b_2])$$

ולכן $(A \times B)_i = A_i \times B_i$. כמו בסעיפים הקודמים, ישנם m, k כך ש-$A_m = \{e_A\}$ ו-$B_k = \{e_B\}$. לכן

$$(A \times B)_{\max(m,k)} = \{e_A\} \times \{e_B\} = \{e_{A \times B}\}$$

ולכן $A \times B$ נילפוטנטית.

בהצלחה!