תרגיל 12 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. האם ניתן לבנות את:

(א) $\sqrt[5]{3}$.

פתרון: הפולינום המינימלי הוא $x^5 - 3$ שדרגתו אינה חזקה של 2 ולכן המספר לא ניתן לבניה.

(ב) $e^{\frac{2\pi i}{6}}$.

פתרון: ניתן לבנות את $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ כי $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$ ממימד 2 מעל $\mathbb{Q}$. אבל כמובן ש

$$[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{6}}) : \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})] \leq 2$$

(כי זה שורש של הפולינום $x^2 - e^{\frac{2\pi i}{3}}$) ולכן ניתן לבנות את $e^{\frac{2\pi i}{6}}$
שימו לב: זה לא חיוני לפתרון התרגיל אבל

$$\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{6}}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$$

כי שניהם הרחבה ממימד 2 מעל $\mathbb{Q}$.

2. עבור אילו ערכי n ניתן לבנות את $\sqrt[n]{2}$?

פתרון: הפולינום המינימלי הוא $x^n - 2$. לכן אם $n \neq 2^k$ אי אפשר לבנות. אם $n = 2^k$ אפשר כי אנחנו יודעים ששדה המספרים הניתנים לבניה סדור להוצאת שורש. ולכן

$$\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{2} \ldots$$

ניתנים לבניה.

3. תהי G חבורה מסדר 2^n. הוכיחו כי קיימת סדרה יורדת של תתי חבורות

$$\{1\} \subseteq G_n \subseteq \cdots \subseteq G_0 = G$$

כך ש $[G_i : G_{i+1}] = 2$. (רמז: משפט מתורת החבורות אומר שהמרכז של חבורה בגודל p^k אינו טריויאלי).

פתרון: נוכיח את הטענה באינדוקציה. $n = 1$ טריוויאלי. כזכור המרכז $Z \subseteq G$ אינו טריויאלי. לכן גודלו הוא 2^k עבור k חיובי כלשהוא. לפי משפט קושי, יש למרכז תת חבורה H בגודל 2. H היא תת חבורה נורמלית (בגלל שהיא בתוך המרכז ברור ש $gH = Hg$). ולכן קיימת תת החבורה G/H והיא בגודל 2^{n-1}. לפי הנחת אינקודציה יש סדרת הרכב

$$\{1\} = K_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq K_0 = G/H$$

כך ש $[K_i : K_{i+1}] = 2$. לפי משפט ההתאמה מתורת החבורות. קיימות תתי חבורות

$$H = G_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq G_0 = G$$

כך ש

$$G_i/H \cong K_i$$

וגם

$$[G_{i+1} : G_i] = 2$$

ולכן

$$\{1\} \subseteq H = G_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq G_0 = G$$

היא סדרת ההרכב הרצויה.

4. הוכיחו כי הרחבת גלואה E/F היא מוגדרת ריבועית אם ורק אם $\mathrm{Gal}(E/F)$ היא מסדר 2^nעבור n כלשהוא.
פתרון: לפי התאמת גלואה, יש סדרה

$$F = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_n = E$$

$$[E_{i+1} : E_i] = 2$$

אם ורק אם יש לחבורת גלואה $G = \mathrm{Gal}(E/F)$ סדרת הרכב

$$\{1\} \subseteq G_n \subseteq \cdots \subseteq G_0 = G$$

כך ש $[G_i : G_{i+1}] = 2$ לכן הטענה נובעת מייד מהתרגיל הקודם.