פתרון בוחן בדידה למדמח, קיץ תשעז

ט"ו אלול 6/9/2017

מרצה: אחיה בר־און

מתרגל: אריאל ויצמן.

- ענו על כל השאלות.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי ־ מומלץ להתחיל עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.
- מבנה הבוחן וניקוד: בבוחן 3 שאלות $\times$ 36 נקודות לכל שאלה = 108 נקודות בסה"כ.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. לכל $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ נגדיר את הקבוצה $A_n = \{k \in \mathbb{N} | 2 \leq k \leq 3n - 2\}$, ונגדיר $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$.

א. חשבו את $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} B_n$. הוכיחו את תשובתכם (כלומר, הוכיחו את השיוויון בין האיחוד הנתון לבין תשובתכם). (18 נקודות)

ב. נסמן $D_n = \mathbb{N} \setminus B_n$. חשבו את $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} D_n$. הוכיחו את תשובתכם (כלומר, הוכיחו את השיוויון בין החיתוך הנתון לבין תשובתכם). (18 נקודות)

<u>פתרון:</u>

א.

נראה כי $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} B_n = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\}$.

הוכחה: בשלב ראשון נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $B_n = \{x \in \mathbb{N} | 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1\}$.

$x \in B_n = A_{n+1} \setminus A_n \iff x \in A_{n+1} \wedge X \notin A_n \iff (2 \leq x \leq 3n + 1) \wedge \neg(2 \leq x \leq 3n - 2) \iff (3n - 1 \leq x \leq 3n + 1)$.

כלומר $x \in B_n \iff x \in \{x \in \mathbb{N} | 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1\}$ ולכן מתקיים שיוויון.

כעת, נוכיח כי $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} \{x \in \mathbb{N} | 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1\} = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\}$ ע"י הכלה דו כיוונית:

יהי $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\}$ נוכיח כי הוא באיחוד:

x הוא מספר טבעי גדול מ2, לכן יש 3 מקרים: **אם x מתחלק ב 3,** אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x = 3n$ ולכן $3n - 1 \leq x \leq 3n + 1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

אם $x - 1$ מתחלק ב 3, כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x - 1 = 3n$ כלומר $x = 3n + 1$ ולכן $3n - 1 \leq x \leq 3n + 1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

אם $x + 1$ מתחלק ב 3, כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x + 1 = 3n$ כלומר $x = 3n - 1$ ולכן $3n - 1 \leq x \leq 3n + 1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

ובכל אופן מצאנו כי $x \in \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} B_n$.

נניח כעת כי $x \in \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} \{x \in \mathbb{N} | 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1\}$ ונוכיח כי $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\}$.

$x \in \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} \{x \in \mathbb{N} | 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1\} \implies \exists n \in \mathbb{N} : 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1$.

כיוון ש$n \geq 1$ נקבל $3n - 1 \geq 2$ ולכן $x \geq 2$ כלומר $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\}$. וסיימנו.

ב.

ניקח בתור הקבוצה האוניברסלית שלנו את $\mathbb{N}$. אזי :

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} D_n = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} \mathbb{N} \setminus B_n = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} B_n^c = \left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} B_n \right)^c = (\{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\})^c = \{1\}.$$

2. פרדיקט P מעל השלמים ייקרא "חביב" אם לכל $a \in \mathbb{Z}$ קיים $b \in \mathbb{Z}$ כך שהפסוק

$$P(a) \oplus P(b)$$

בעל ערך $TRUE$.

א. רשמו 2 פרדיקטים חביבים שונים. (18 נקודות)

ב. יהיו P,Q פרדיקטים **שאינם** חביבים. הוכיחו:

$$\exists a\in\mathbb{Z}:P(a)\equiv Q(a)\iff\forall a\in\mathbb{Z}:P(a)\equiv Q(a)$$

(18 נקודות)

__פתרון:__

א. למשל $P(a)=a \text{ is even}$ וכן $P(a)=a>0$.

ב. מימין לשמאל זה טריוויאלי. משמאל לימין: יהיו P,Q פרדיקטים שאינם חביבים. נראה שלכל $a,b\in\mathbb{Z}$ מתקיים $P(a)\equiv P(b)\wedge Q(a)\equiv Q(b)$:

אחרת, קיימים $a_0,b_0\in\mathbb{Z}$ כך ש $P(a_0)\not\equiv P(b_0)$ ולכן, בה"כ $P(a_0)=T\wedge P(b_0)=F$. כעת יהי $a\in\mathbb{Z}$. אם $P(a)=T$ אז, לפי הגדרת הקשר קסור, נקבל $P(a)\oplus P(b_0)=T$, אחרת $P(a)\oplus P(a_0)=T$, ובסה"כ P חביב בסתירה. כנ"ל עבור Q.

כיון שאנחנו יודעים שP נותן או אמת על הכל או שקר על הכל וכנ"ל Q, אם ידוע שקיים a עליו הם נותנים ערך זהה, הם נותנים ערך זה לכל איבר, ולכן שקולים על כל $\mathbb{Z}$.

3. על $P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ נגדיר יחס R באופן הבא: לכל $(A,B),(C,D)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$

$$(A,B)R(C,D)\iff A\triangle B=C\triangle D$$

א. הוכיחו ש-R יחס שקילות. (12 נקודות)

ב. נתבונן במחלקת השקילות $[(\mathbb{N},\phi)]_R$. הוכיחו או הפריכו:

1. $(A,B)\in[(\mathbb{N},\phi)]_R\Rightarrow A\cup B=\mathbb{N}$. (6 נקודות)
2. $(A,B)\in[(\mathbb{N},\phi)]_R\Leftarrow A\cup B=\mathbb{N}$. (6 נקודות)
3. $(A,B)\in[(\mathbb{N},\phi)]_R\Rightarrow A\cap B=\phi$. (6 נקודות)
4. $(A,B)\in[(\mathbb{N},\phi)]_R\Leftarrow A\cap B=\phi$. (6 נקודות)

__פתרון:__

א. רפלקסיביות: $\forall(A,B)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N}):A\triangle B=A\triangle B$. (רפלקסיביות השיוויון)

סימטריות: $\forall(A,B)(C,D)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N}):A\triangle B=C\triangle D\Rightarrow C\triangle D=A\triangle B$. (סימטריות השיוויון)

טרנזיטיביות: $\forall(A,B),(C,D),(E,F)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N}):A\triangle B=C\triangle D\wedge C\triangle D=E\triangle F\Rightarrow A\triangle B=E\triangle F$. (כלל המעבר, טרנזיטיביות השיוויון)

ב. הרעיון הוא ש- $A\triangle B=\mathbb{N}\iff(A,B)\in[(\mathbb{N},\phi)]_R$.

1. הוכחה: נתון ש- $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=A\triangle B=\mathbb{N}$, ולכן מוכרח שהאיחוד הוא כל הטבעיים (הוא כמובן מוכל בטבעיים), כי אם לא אז יש $x\in\mathbb{N}$ כך ש $x\notin A\cup B$ ולכן גם לא בהפרש הסימטרי בסתירה.

2. הפרכה: ניקח $A=\mathbb{N},B=\mathbb{N}$. האיחוד הוא $\mathbb{N}$, ההפרש הסימטרי ריק.

3. הוכחה: נניח בשלילה שקיים $x\in A\cap B$, לכן לפי הגדרת הפרש סימטרי נקבל $x\notin A\triangle B$ בסתירה לכך שההפרש הסימטרי הוא כל הטבעיים.

4. ניקח $A=\{1\},B=\{2\}$. החיתוך ריק ההפרש הסימטרי הוא $\{1,2\}$.

הערה: תרגיל המשך בעוצמות: לכל $(A,B)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ חשבו את $|[A,B]_R|$. חשבו את $|{}^{P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})}/_R|$.