פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 1

1. ע"י פישוט מקבלים $z=4+4i$. אם כך, $r=4\sqrt{2},\theta=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$. כלומר $z=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

א. $\frac{1}{z}=\frac{1}{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ב. $z^{17}=4^{17}\sqrt{2}^{17}e^{i\frac{17\pi}{4}}=4^{17}2^{8}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=2^{42}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ג. $(\bar{z})^{17}=\overline{z^{17}}=2^{42}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ד. $z^{2n}=4^{2n}2^{n}e^{i\frac{n\pi}{2}}=2^{5n}e^{i\frac{n\pi}{2}}=2^{5n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+i2^{5n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, ולכן

$$\operatorname{Im}\left(z^{2n}\right)=2^{5n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

2.

א. $z^{6}=(1-i)^{3}=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{3}=2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$. ע"פ השיטה מההרצאה מקבלים

$z_k=\left(2\sqrt{2}\right)^{1/6}e^{-\frac{1}{8}\pi i+\frac{2\pi ki}{6}}=2^{1/4}e^{-\frac{\pi}{8}i+\frac{2\pi ki}{6}}$ עבור $k=0,1,2,3,4,5$.

ב. נציב $w=\frac{z-1}{z+1}$, ואז $w^{5}=2e^{0}\Rightarrow w_k=2^{1/5}e^{\frac{2\pi ik}{5}}$, עבור $k=0,1,2,3,4$. ניתן לחלץ את z

חזרה. $z_k=\frac{w_k+1}{1-w_k}=\frac{2^{1/5}e^{\frac{2\pi ik}{5}}+1}{1-2^{1/5}e^{\frac{2\pi ik}{5}}}$ עבור $k=0,1,2,3,4$. (רצוי להכפיל ולחלק בצמוד של המכנה).

ג. המשוואה היא $0=\sum_{n=0}^{4}(-z)^{n}=1-z+z^{2}-z^{3}+z^{4}$. אם המנה בסכום ההנדסי, $q=-z$ היא לא

אחד (ז.א. $z\neq -1$), ניתן להשתמש בנוסחה לסכום הנדסי ולקבל $\frac{1-(-z)^{5}}{1+z}=0$. מקבלים לכאורה

חמישה פתרונות למשוואה $(-z)^{5}=1$ והם $z_k=-e^{\frac{2\pi ik}{5}}$ עבור $k=0,1,2,3,4$ - אך יש לשים לב

שהפתרון $z_0=-1$ לא חוקי (הנוסחה ההנדסית לא עובדת במקרה זה). אפשר לבדוק שמינוס אחד

לא פותר את המשוואה, ונשארים עם ארבעת הפתרונות z_1,z_2,z_3,z_4.

ד. נציב $w=z-i$ ונקבל משוואה דו-ריבועית $w^2+2w+2=0$. אפשר לפתור משוואה זו בקלות:

$w_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=-1\pm i$. מכאן מקבלים שתי משוואות בשביל z , שכל אחת מהן תתן n

פתרונות. הראשונה $(z-i)^n=-1+i=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ נותנת $z_k-i=2^{n/2}e^{\frac{3\pi}{4n}i+\frac{2\pi ik}{n}}$, כלומר

$z_k=i+2^{n/2}e^{\frac{3\pi}{4n}i+\frac{2\pi ik}{n}}$ עבור $k=0,1,2,\ldots,n-1$. השנייה באופן דומה נותנת

$z_k=i+2^{n/2}e^{-\frac{3\pi}{4n}i+\frac{2\pi ik}{n}}$, עם אותם ערכים ל- k .

.3

א. ראשית , אם θ היא כפולה שלמה של π , $S_n=0$. נניח מעתה את ההפך, ונקבל

$$S_n=\mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right)+\mathrm{Im}\left(e^{2i\theta}\right)+\ldots+\mathrm{Im}\left(e^{ni\theta}\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^k\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\frac{\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}-\overline{\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}}}{2i}=$$

$$=\frac{\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}-\frac{1-e^{-i(n+1)\theta}}{1-e^{-i\theta}}}{2i}=\frac{1}{2i}\frac{\left[\left(1-e^{-i\theta}\right)\left(1-e^{i(n+1)\theta}\right)-\left(1-e^{i\theta}\right)\left(1-e^{-i(n+1)\theta}\right)\right]}{\left(1-e^{i\theta}\right)\left(1-e^{-i\theta}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{\left[1-e^{i(n+1)\theta}-e^{-i\theta}+e^{in\theta}-1+e^{-i(n+1)\theta}+e^{i\theta}-e^{-in\theta}\right]}{\left(1-\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}=\frac{1}{2i}\frac{\left[\left(e^{-i(n+1)\theta}-e^{i(n+1)\theta}\right)+\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)+\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right]}{\left(1-\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{\left[2i\sin\left(-\left(n+1\right)\theta\right)+2i\sin\left(n\theta\right)+2i\sin\theta\right]}{\left(1-\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}=\frac{-\sin\left[\left(n+1\right)\theta\right]+\sin\left(n\theta\right)+\sin\theta}{\left(1-\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}$$

.3.ב

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{Re}(e^{ik\theta})=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{Re}((e^{i\theta})^{k}1^{n-k})=\mathrm{Re}(e^{i\theta}+1)^{n}$$

אבל

$$\begin{aligned}(e^{i\theta}+1)^{n}&=(\cos\theta+1+i\sin\theta)^{n}=(2\cos^{2}\frac{\theta}{2}+i\sin\theta)^{n}=(2\cos^{2}\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})^{n}\\&=(2\cos\frac{\theta}{2})^{n}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})^{n}=(2\cos\frac{\theta}{2})^{n}(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2})\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathrm{Re}(e^{i\theta}+1)^{n}=(2\cos\frac{\theta}{2})^{n}\cos\frac{n\theta}{2}$$

4. נתון כי $x^2+y^2=1$. נתחיל בחישוב:

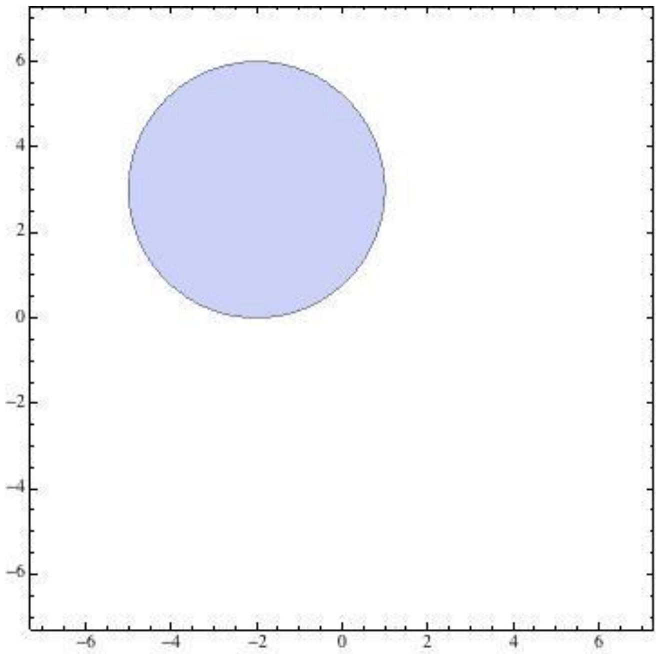
$$\frac{z+1}{z-1}=\frac{x+1+iy}{x-1+iy}=\frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}=\frac{(x+1)(x-1)+y^2+i\left[(x-1)y-(x+1)y\right]}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-1+i[\cdots]}{[\cdots]}$$

מהנתון, החלק הממשי של זה אפס, ולכן $\frac{z+1}{z-1}$ מדומה טהור.

.5

א. זהו עיגול סגור (עם שפה). מרכזו בנק' $(-2,3)$, ורדיוסו באורך 3 יחידות.



ב. אליפסה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן משתי נקודות קבועות, הוא קבוע.