מבנים דיסקרטיים – תרגיל בית 4
להגשה ב 7.5.2013

1. הוכיחו ש $G_n = \{g \in G : g^n = e\}$ היא תת חבורה של G אבלית.

תשובה:

נשתמש בקריטריון המקוצר לת"ח.

$G_n \neq \varnothing$ כי $e^n = e \Rightarrow e \in G_n$.

$$g, h \in G_n \Rightarrow \left(gh^{-1}\right)^n = g^n \left(h^{-1}\right)^n = e\left(h^n\right)^{-1} = ee^{-1} = e$$
$$\Rightarrow gh^{-1} \in G_n$$
.

2. תנו דוגמא לחבורה G שיש לה 3 תת-חבורות לא טריוויאליות A, B, C המקיימות $G = A \cup B \cup C$. [רמז: נסו $G = Z_2 \times Z_2$]

תשובה: בדקו שהתת-קבוצות הבאות הן ת"ח:

$\{(0,0),(0,1)\}$

$\{(0,0),(1,0)\}$

$\{(0,0),(1,1)\}$

3. מצאו את כל התת-חבורות של $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

תשובה: $\{(0,0)\}$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

$< (1,0) >= \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\} = \mathbb{Z}_4 \times \{0\}$

$< (2,0) >= \{(0,0),(2,0)\}$

$\cancel{< (3,0) >= \{(3,0),(2,0),(1,0),(0,0)\} = \mathbb{Z}_4 \times \{0\}}$

$< (0,1) >= \{(0,0),(0,1)\} = \{0\} \times \mathbb{Z}_2$

$< (1,1) >= \{(0,0),(1,1),(2,0),(3,1)\}$

$< (2,1) >= \{(0,0),(2,1)\}$

$\cancel{< (3,1) >= \{(0,0),(3,1),(2,0),(1,1)\}}$

$\cancel{< (0,1),(1,0) >= \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2}$

$< (0,1),(2,0) >= \left(2\mathbb{Z}_4\right) \times \mathbb{Z}_2$

$\cancel{< (2,1),(2,0) >= \left(2\mathbb{Z}_4\right) \times \mathbb{Z}_2}$

יש סה"כ 8 תתי חבורות. אם רוצים לפתור את התרגיל כמו שצריך יש להמשיך לעבור על כל האפשרויות, וגם להראות ש 3 יוצרים לא יוצרים ת"ח חדשות.

4. מצאו את כל התת-חבורות של S_3

תשובה:

$$S_3$$
$$<(12)>, <(13)>, <(2,3)>$$
$$<(123)>$$
$$\{(1)\}$$

5. יהיו $A, B \subseteq (G,+,0)$ שתי תת-קבוצות של חבורה אבלית. נגדיר $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$. הראו שאם A,B תתי-חבורות של G אזי $A+B$ ת"ח של G.

תשובה:

בוודאי ש $A+B$ אינה ריקה כיוון ש $0=0+0\in A+B$.

יהיו $a_1+b_1, a_2+b_2 \in A+B$ (כאשר $a_1,a_2\in A, \quad b_1,b_2\in B$).

אזי $(a_1+b_1)-(a_2+b_2)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\in A+B$.

לכן לפי הקריטריון המקוצר נקבל ש $A+B$ ת"ח.

6. חשבו את $3\mathbb{Z}+4\mathbb{Z},\ 6\mathbb{Z}+10\mathbb{Z}$.

תשובה:

$$3\mathbb{Z}+4\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$$
$$6\mathbb{Z}+10\mathbb{Z}=2\mathbb{Z}$$

מראים הכלה דו-כיוונית (שימו לב ש $4-3=1,\ \ 6\times 2-10=2$).

7. הראו שאם חבורה אינה אבלית אזי היא אינה ציקלית.

תשובה:

זה שקול להוכיח: כל חבורה ציקלית היא אבלית. זה נכון כי ב $G=<x>$ כל איבר הוא מהצורה x^i ואז $x^i x^j = x^j x^i$.