

תרגיל 14 – אלגברה מופשטת 1

1. מצאו סדרת הרכב ל D_4 . הסיקו ש- D_4 פתירה.
2. הוכיחו או הפריכו:
 - 2.1. כל חבורה G מסדר 1089 היא פתירה.
 - 2.2. כל חבורה G מסדר 60 היא פתירה.
3. ענו על הסעיפים הבאים.
 - 3.1. תהי G חבורה בת 35 איברים. הוכיחו כי G פתירה.
 - 3.2. תהי G חבורה בת 125 איברים. האם בהכרח G פתירה?
4. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2006)

מעל קבוצה $R \times R^*$ נגדיר פעולה $(a_1, b_1) \bullet (a_2, b_2) = (a_1 + b_1 a_2, b_1 b_2)$. הוכיחו:

 - 4.1. $G = (R \times R^*, \bullet)$ חבורה.
 - 4.2. G אינה אבלית.
 - 4.3. קיים מונומורפיזם $G \rightarrow GL_2(R)$.
 - 4.4. G חבורה פתירה. רמז: השתמשו בסעיף הקודם ובחישוב קומוטטורים.
5. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2006)

נסמן $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ ("הקומוטטור") של $a, b \in G$ בחבורה G . נגדיר ת"ח $G' := \langle \{[a, b] : a, b \in G\} \rangle \leq G$ הנוצרת ע"י קבוצת הקומוטטורים. הוכיחו:

 - 5.1. $G' \triangleleft G$.
 - 5.2. G/G' אבלית.
 - 5.3. אם $f: G \rightarrow Y$ הומומורפיזם ו Y חבורה אבלית אז $G' \subseteq \ker f$.
6. ענו על הסעיפים הבאים:
 - 6.1. מצאו את $(A_4)'$.
 - 6.2. מצאו את $(S_4)'$.
7. הוכיחו שכל חבורה מסדר 88 היא פתירה.

בהצלחה! 😊