תרגול 1

1) הוכיחו כי המידה של כל קטע שווה לאורכו.

פתרון: נסמן $l(I)$ - אורך קטע $m^*(I)$ - מידה חיצונית שלו.

$m^*(I) \le l(I)$: אם $l(I)=\infty$ סיימנו. אחרת, נניח כי $I=[a,b]$ (או (a,b) וכו') נזכיר כי עפ"י הגדרה :

$$m^*(I)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid \bigcup_{I_n \text{ open}} I_n \supset I\right\}$$

הקטע $I_\varepsilon=(a-\varepsilon,\mathrm{b}+\varepsilon)$ מכיל את I ואורכו $l(I)+2\varepsilon$ ומכאן שלכל $\varepsilon>0$

$$m^*(I)\le l(I)+2\varepsilon \Rightarrow m^*(I)\le l(I)$$

$m^*(I)\ge l(I)$:

נחלק למקרים:

i. אם I קומפקטי $I=[a,b]$: נניח ש $\{I_n\}$ הינו אוסף של קטעים פתוחים כך ש $\bigcup I_n \supseteq I$. מכיוון ש I קומפקטי קיים אוסף סופי של קטעים פתוחים $A=\{I_1,\dots,I_n\}$ כך ש $\bigcup_{i=1}^{k} I_i \supseteq I$. נבנה את הקבוצה A באופן הבא:
נבחר $I_1^{'} \in \mathrm{A}$ להיות איזשהו קטע שמכיל את a, וגם

$$\begin{aligned}
&I_1^{'}=(x_1,\mathrm{y}_1): \quad x_1<a<y_1\\
&I_2^{'}=(x_2,\mathrm{y}_2): \quad x_2<y_1<y_2\\
&\vdots\\
&I_i^{'}=(x_i,\mathrm{y}_i): \quad x_i<y_{i-1}<y_i\\
&\vdots\\
&I_k^{'}=(x_k,\mathrm{y}_k): \quad x_k<b<y_k
\end{aligned}$$

עכשיו, מכל כיסוי $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (יכול להיות גם אינסופי) נוכל ליצור כיסוי סופי של קטעים פתוחים (כמו מקודם) ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \ge \sum_{i=1}^{k} l(I_i^{'}) = \sum_{i=1}^{k} (y_i - x_i) \ge b-a$$

ומכאן נובע

$$m*(I) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid \bigcup_{I_n \text{ open}} I_n \supset I\right\} \ge l(I)$$

ii. עבור קטע כללי מהצורה $I=(a,b],(a,b),[a,b)$ נשתמש בעובדה כי $A\subseteq B \Rightarrow m*(A)\le m*(B)$. ניקח קטע $I^{'}=[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ ונשים לב שמתקיים לכל $\varepsilon>0$

$$b-a-2\varepsilon = m*(I^{'}) \le m*(I)$$
$$\Rightarrow b-a \le m*(I)$$

iii. עבור קטע מהצורה (a,∞) או $[a,\infty)$ נבחר $[a+1,a+n]\subseteq I$ ולכן לכל n מתקיים

$$m*(I) \ge n-1 \Rightarrow m*(I)=\infty$$

מש"ל

2) הוכיחו כי אם $m*(A)=0$ אזי $m*(A\cup B)=m*(B)$.

פתרון:

$\ge$: $B\subseteq A\cup B$ ולכן $m*(A\cup B)\ge m*(B)$.

$\le$: עפ"י ה sub-additive property מתקיים

$$m*(A\cup B) \le m*(A)+m*(B)$$
$$\Rightarrow m*(A\cup B)\le m*(B)$$

3) תהי A קבוצת האי רציונאליים באינטרוול $[0,1]$. הוכח כי $m*(A)=1$.

פתרון:

המידה החיצונית של כל נקודה ב $\mathbb{R}$ היא 0 מכיוון שאם $x\in\mathbb{R}$ נקודה, אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים הקטע $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ שאורכו 2ε ומכיל את x , לכן :

לכל $m^*(x)\le 2\varepsilon \Rightarrow m^*(x)=0$.

נסמן ב B את קבוצת הראציונאליים ב $[0,1]$, B היא בת מנייה ולכן נוכל לרשום $B=\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

כמו כן

$$m^*(B)\le \sum_{i=1}^{\infty} m^*(x_i)=0 \Rightarrow m^*(B)=0$$

נזכור כי $[0,1]=\mathrm{B}\cup\mathrm{A}$ ולכן

$$1=m^*([0,1])\le m^*(B)+m^*(A)=m^*(A)$$

מצד שני

$$m^*(A)=1 \;\Leftarrow\; 1\ge m^*(A) \text{ ולכן } [0,1]\supseteq \mathrm{A}$$

מש"ל

4) תהי B קבוצת הרציונאליים ב $[0,1]$ ותהי $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ קבוצה סופית של קטעים פתוחים שמכסה את B. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n} m^*(I_k)\ge 1$.

פתרון:

$$1=m^*([0,1])=m^*(\overline{B})\le m^*\left(\overline{\bigcup I_n}\right)=m^*\left(\bigcup \overline{I_n}\right)\le \sum m^*(\overline{I_n})=\sum l(\overline{I_n})$$

מש"ל

שימו לב כי השיוויון $\overline{\bigcup I_n}=\bigcup \overline{I_n}$ מתקיים כי קבוצת הקטעים $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ הינה סופית.

אם ניקח לדוגמא את הסדרה $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ כאשר $I_k=\left(\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)$ נקבל כי

$$\overline{\bigcup I_k}=\overline{\bigcup\left(\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)}=\overline{(0,1)}=[0,1]$$

לעומת זאת

$$\bigcup \overline{I_k}=\bigcup\left[\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right]=(0,1)$$

5) הוכח: כל קבוצה פתוחה $G\subseteq\mathbb{R}$ הינה איחוד בן מניה של קטעים זרים פתוחים ב $\mathbb{R}$.

פתרון:

לכל $x\in G$, יהי I_x הקטע הפתוח הגדול ביותר ב $\mathbb{R}$ כך שמתקיים $x\in I_x\subseteq G$. נניח כי $x,y\in G$ וגם $I_x\cap I_y\ne\varnothing$ אזי $I_x\cup I_y$ הינו קטע פתוח וכן

$$I_y \subseteq I_x \cup I_y \subseteq G \qquad \text{וגם} \qquad I_x \subseteq I_x \cup I_y \subseteq G$$

מההגדרה של I_x ו I_y נובע ש $I_x = I_x \cup I_y$ וכן $I_y = I_x \cup I_y$ ולכן $I_y = I_x$. מכאן נובע כי I_x ו I_y הינם שווים או זרים, ולכן G הינו איחוד זר של קטעים פתוחים ב $\mathbb{R}$.

$$G = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$$

כעת נראה כי $\mathcal{C}$ הינו אוסף בן מניה . נשים לב כי כל $I \in \mathcal{C}$ מכיל מספר ראציונאלי x_I .
נוכל לבנות מיפוי חח"ע ועל

$$\varphi : \mathcal{C} \to \{x_I : I \in \mathcal{C}\}$$

ע"י $\varphi(I) = x_I$ לכל $I \in \mathcal{C}$. כלומר, לכל $I \in \mathcal{C}$ נתאים את הראצינאלי שבחרנו ממנו.
כמובן ש $\{x_I : I \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathbb{Q}$ ולכן הינה בת מניה ומכאן ש $\mathcal{C}$ בת מנייה.