פתרון תרגיל בית 7- מופשטת 1

<u>שאלה 1</u>

א. מצאו גודל של מחלקת צמידות $[\beta]=\{g^{-1}\beta g: \quad g\in S_{15}\}$ של האיבר $\beta=(3,2,6,9)$ ואת סדר המייצב של β (תחת הצמדה).

ב. תהי $H\le S_9$ תת חבורה הנוצרת על ידי $(123)(789)$ ו-(345). נניח ש- H פועלת (הפעולה הטבעית) על $X=\{1,2,3,...,9\}$. כמה מסלולים יש לפעולה זו ומהו סדרם של מסלולים אלו?

<u>פתרון</u>

א. (<u>הערה לגבי סימונים</u>: $orb(a)=G*a$)

למעשה אנו מתבוננים בפעולה של S_{15} על עצמה על-ידי הצמדה. גודל מסלול ההצמדה של β הוא מספר האיברים בחבורה אשר צמודים לה; משמע, מספר המחזורים מאורך 4. מתקיים:

$$|S_{15}*\beta|=|conj(\beta)|=\binom{15}{4}(4-1)!=8190.$$

את סדר המייצב ניתן לחשב מהמשפט: $|G*x|=[G:Stb(x)]$. מקבלים:

$$|Stb(\beta)|=\frac{15!}{8190}=159,667,200.$$

ב. נסמן $a=(123)(789),b=(345)$.

במסלול של 7 יש לפחות את 8 ו-9, שכן $a(7)=8, aa(7)=9$.

במסלול של 1 יש לפחות את 2,3,4,5, שכן

$a(1)=2, aa(1)=3, baa(1)=4, bbaa(1)=5$.

מצד שני, שני היוצרים a,b מכבדים את החלוקה $\{1,2,3,4,5\}\cup\{6\}\cup\{7,8,9\}$ ולכן גם שאר האיברים מכבדים חלוקה זו. לכן יש שלושה מסלולים: $orb(1), orb(6), orb(7)$.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

א. תהא G חבורה ונתון שקיים $1 \neq g \in G$ כך שמחלקת הצמידות שלו מכילה שני איברים. הוכיחו שקיימת ב- G תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית.

ב. תהא $G = S_4$ הפועלת על הקבוצה $X = \{1,2,3,4\}$ על-ידי $g * x = g(x)$. חשבו את המייצב של $x = 2$. האם המייצב של $x = 2$ הוא ת"ח נורמלית של G? נמקו.

<u>פתרון</u>

א. ידוע שעבור פעולת ההצמדה של G על עצמה מתקיים $|conj(g)| = 2$ ולכן $[G : C_G(g)] = 2$ ולכן $C_G(g) \triangleleft G$.

ב. המייצב של $x = 2$ הוא התמורות שלא מזיזות את 2, כלומר: $A = \{id, (13), (14), (34), (134), (143)\}$. המייצב אינו תת חבורה נורמלית שכן, למשל, $(23) \notin A$ (מדוע זה אומר שהיא אינה נורמלית?).

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

תנו דוגמה לפעולה נאמנה של חבורה לא טריוויאלית G על קבוצה X עם איבר $x \in X$ כך ש- $Stab(x) = G_x = G$.

<u>תזכורת</u>: פעולה היא נאמנה אם רק איבר היחידה פועל באופן טריוויאלי.

<u>פתרון</u>

נבחר $G = X$ כאשר G היא חבורה לא טריוויאלית עם מרכז טריויאלי, למשל $G = D_3$, ונתבונן בפעולת ההצמדה $g * x = gxg^{-1}$. עבור $id \in X$ מתקיים לכל $g \in G$ $g * id = g(id)g^{-1} = id$ כלומר $Stab(id) = G$. נראה שזוהי פעולה נאמנה.

יהי $g \neq id$, יש להראות שקיים $x \in X$ כך ש $g * x = gxg^{-1} \neq x$. תנאי זה אכן מתקיים שכן $g \neq id$ ומכאן $g \notin Z(D_3)$ ולכן קיים $x \in G = X$ כך ש- $gx \neq xg$ ומכאן $gxg^{-1} \neq x$.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל $1\neq x\in G$, x אינו צמוד להופכי שלו.

<u>פתרון</u>

<u>דרך א'</u>

יהי $1\neq x\in G$ ונניח בשלילה שהוא צמוד לעצמו, כלומר $x^{-1}\in conj(x)$. לכן מחלקת השקילות של x מכילה לפחות שני איברים. היא אינה יכולה להיות מסדר זוגי (כי סדרה חייב לחלק את סדר החבורה) ולכן קיים $y\neq x,x^{-1}$ שנמצא במחלקת השקילות של x. נניח בה"כ ש- y צמוד ל-x. לכן y^{-1} צמוד ל-x^{-1} (מדוע?) ולכן גם $y^{-1}\in conj(x)$. ושוב יש מספר זוגי של איברים (וודאו ש-y^{-1} אכן שונה מכל האיברים במחלקה). ממשיכים בתהליך דומה עד אשר "נגמרים" האיברים בחבורה, ואנחנו נשארים עם סתירה.

<u>דרך ב'</u>

נניח בשלילה כי x צמוד להופכי שלו, כלומר קיים $g\in G$ כך ש-$gxg^{-1}=x^{-1}$.
נצמיד שוב את שני האגפים עם g ונקבל: $g^2xg^{-2}=gx^{-1}g^{-1}=\left(gxg^{-1}\right)^{-1}=x$, כלומר $g^2x=xg^2$. הסדר של g הוא אי-זוגי, נניח $o(g)=2m+1$ ולכן $1=g^{2m+1}=g\left(g^2\right)^m$, כלומר $g^{-1}=\left(g^2\right)^m$. נציב זאת ב-$gxg^{-1}=x^{-1}$ ונקבל $x=x^{-1}$ וזאת סתירה (מדוע?).

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

א. נניח ש-G היא חבורת מסדר p^k עבור p ראשוני ו-$k \geq 1$, וש- G פועלת על קבוצה עם n איברים כש- p לא מחלק את n. הוכיחו שקיימת נקודת שבת משותפת.

ב. הוכיחו או הפריכו: בהינתן חבורה G הפועלת על קבוצה X כך ש- $|G|=|X|=13$, בהכרח קיימת לפעולה נקודת שבת.

<u>פתרון</u>

א. נתון $|G|=p^k,|X|=n$ ו- p לא מחלק את n. אם $\{x_1,...,x_t\}$ הם הנציגים של המסלולים אז: $n=\sum_{i=1}^{t}|orb(x_i)|=\sum_{i=1}^{t}\frac{|G|}{|Stab(x_i)|}$. כלומר n הוא סכום גדלי המסלולים, המחלקים את $|G|$. המספרים הטבעיים שיכולים לעשות זאת הם : $\{1,p,p^2,...,p^k\}$.כלומר, כל מסלול הוא מגודל p^i $(0\leq i\leq k)$ ו- n הוא סכום הגדלים. לפיכך n הוא מהצורה: $n=a_0+a_1p+...+a_kp^k$.
כיוון ש- p לא מחלק את n אז בהכרח $a_0>0$; כלומר יש לפחות מסלול אחד באורך 1, משמע – יש נקודת שבת משותפת.

ב. <u>הפרכה</u>: למשל G פועלת על עצמה על ידי כפל משמאל. לפעולה זו לא קיימות נקודות שבת (מדוע?).

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

א. מצאו בכמה דרכים <u>שונות</u>, עד כדי הסימטריה של הריבוע, ניתן לצבוע קודקודים של ריבוע, כאשר כל קודקוד ניתן לצבוע באחד משלושה צבעים שונים. (שימו לב: שתי צביעות יחשבו זהות אם ניתן להגיע מאחת לשניה באמצעות סיבובים ו/או שיקופים.)

ב. מצאו כמה לוחות משבצות 3×3 לא שקולים קיימים (עד כדי סימטריות של הריבוע) אם מותר לצבוע כל משבצת באחד משני צבעים שונים.

<u>פתרון</u>

א. נסמן ב- X את מרחב הצביעות האפשריות. מתקיים $|X|=3^4$.
נחשב את כל הגדלים הדרושים:

$g \in D_4$	$\lvert X_g \rvert$	סה"כ
id	3^4	3^4
$\tau, \sigma^2, \tau\sigma^2$	3^2	$3 \cdot 3^2$
σ, σ^3	3	$2 \cdot 3$
$\tau\sigma, \tau\sigma^3$	3^3	$2 \cdot 3^3$

לבסוף, לפי הלמה של ברנסייד, נקבל:

$k = \frac{1}{8}\left(3^4 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^3\right) = \frac{1}{4}\left(3^4 + 3\right)$.

ב. נגדיר את מרחב הפעולה ככל הצביעות האפשריות של הלוח:

$X = \left\{ f : \{1,2,3,\dots,9\} \to \{0,1\} \right\}$, ונפעל עליו עם החבורה הדיהדרלית D_4.

נחשב את כל הגדלים הדרושים:

$g \in D_4$	$\lvert X_g \rvert$	סה"כ
id	2^9	2^9
σ, σ^3	2^3	$2 \cdot 2^3$
σ^2	2^5	2^5
$\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau$	2^6	$4 \cdot 2^6$

לבסוף נקבל על פי הלמה של ברנסייד כי מספר המסלולים הינו 102.

מש"ל

<u>שאלה 7</u>

א. השתמשו במשפט קיילי על מנת להציג את U_9 כתת חבורה של S_6.

ב. תהי G חבורה אינסופית פשוטה, ותהי H תת חבורה אמיתית של G.

הוכיחו ש-$[G:H]=\infty$.

[<u>רמז</u>: עידון של משפט קיילי.]

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

$U_9=\{1,2,4,5,7,8\}$. כעת, מכיון ש U_9 ציקלית מספיק להראות מה התמונה σ של היוצר 2 ב- $S_{\{1,2,4,5,7,8\}}\cong S_6$. נעשה זאת לפי האלגוריתם בהוכחת משפט קיילי, שכן אז תמונות כל שאר האיברים יקבעו בשל הציקליות. כזכור 2 אמור להיות מועתק ל- σ כאשר $\forall x\in U_9 \quad \sigma(x)=2\cdot x$ ו- $2\cdot x$ כפל ב- U_9.

נקבל $\sigma(1)=2, \sigma(2)=4, \sigma(4)=8, \sigma(8)=7, \sigma(7)=5$.

לכן $\sigma=(1\,2\,4\,8\,7\,5)\in S_{\{1,2,4,5,7,8\}}$.

<u>הערה</u>: ניתן לזהות את המספרים $\{1,2,4,5,7,8\}$ עם $\{1,2,3,4,5,6\}$ (כפי שזיהינו בתרגול את אברי החבורה הדיהדרלית עם מספרים אלה), למרות שבמצב הזה, יתכן וזה יהיה קצת מבלבל.

<u>סעיף ב</u>

נניח בשלילה ש- $[G:H]=n<\infty$. לפי העידון של משפט קיילי, H מכילה תת חבורה נורמלית $N\lhd G$ עבורה $[G:N]\,\big|\,n!$. מכאן $[G:N]<\infty$. מכיוון ש-G פשוטה ו- $N\neq G$ (כי $N\subseteq H$) נקבל ש- $N=\{1\}$. לכן $[G:N]=|G|=\infty$, וזאת סתירה.

מש"ל