פתרונות לתרגיל 8 באינפי 2

שאלה 1

נציב את המעגל כך שהמרכז שלו בראשית הצירים. החלק ברביע הראשון של המעגל מבוטא על ידי הפונקציה $y=\sqrt{R^2-x^2}$ אז צריך לחשב את האורך הזה ולהכפיל ב 4.
לפי הנוסחא לאורך, האורך המדובר הוא:

$$\int_0^R \sqrt{1+(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}})^2}\mathrm{d}x = \int_0^R \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= R\int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

נשים לב שזה אינטגרל לא אמיתי. נחשב אותו:

$$\begin{aligned} R\int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x &= R\lim_{b\to R^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= R\lim_{b\to R^-} \arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^b = R\lim_{b\to R^-}\arcsin\frac{b}{R} \\ &= R\arcsin 1 = \frac{\pi R}{2} \end{aligned}$$

ואחרי שמכפילים ב 4 מתקבל $2\pi R$ כנדרש.

שאלה 2

.1

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}} + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}}$$

את האינטגרל השמאלי ניתן להשוות עם

$$\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}$$

ולקבל

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan}{x} = 1$$

כמו כן,

$$\frac{x}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$$

שאת זה אפשר להשוות במבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$. היות ו $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ מתכנס. גם האינטגרל השמאללי מתכנס. את האינטגרל הימני אפשר להשוות במבחן ההשוואה הגבולי ל $\frac{1}{x^{1.5}}$ולקבל

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \arctan x}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{\pi}{2}$$

היות ו $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס.

.2

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{|\ln x|}}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{-\ln x}}\mathrm{d}x$$

נציב $t = -\ln x$ ולכן $\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x$כלומר

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{-\ln x}}\mathrm{d}x = -\int\limits_{-\ln\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{-\ln\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

וזה אינטגרל מתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

שאלה 3

.1

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

נבצע מבחן ההשוואה עם

$$\frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

קל לראות ש

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1$$

היות ו $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\mathrm{d}x$ מתכנס אם ורק אם $\alpha < 3$ אז גם האינטגרל שלנו מתכנס במצבים אלה.

.2

$$\int\limits_0^1 |\ln(x)|^\alpha \mathrm{d}x$$

עבור $\alpha > 0$ נבצע השוואה עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$, ונקבל

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}|\ln(x)|^\alpha = 0$$

היות ו $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס. עבור $\alpha = 0$ ברור שהאינטגרל מתכנס. עבור $a > 0$ נקבל שעדיין האינטגרל לא אמיתי, והפעם הבעיה ב 1. (בסביבת 0 הפונקציה חסומה). אפשר לכתוב את האינטגרל כ

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{|\ln(x)|^\beta}\mathrm{d}x$$

כאשר $0 < \beta = -\alpha$. נתמקד בחלק הבעייתי

$$\int\limits_a^1 \frac{1}{|\ln(x)|^\beta}\mathrm{d}x$$

כאשר $a > 0$ נבצע השוואה עם $\frac{1}{x|\ln(x)|^\beta}$ ונקבל

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x|\ln(x)|^\beta}{|\ln(x)|^\beta} = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

את האינטגרל הזה

$$\int\limits_a^1 \frac{1}{x|\ln(x)|^\beta}\mathrm{d}x = \int\limits_a^1 \frac{1}{x(-\ln(x))^\beta}\mathrm{d}x$$

קל לחשב, נציב $t = -\ln x$ ולכן $\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

$$\int\limits_a^1 \frac{1}{x(-\ln(x))^\beta}\mathrm{d}x = -\int\limits_{\ln a}^0 \frac{1}{t^\beta}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\ln a} \frac{1}{t^\beta}\mathrm{d}t$$

האינטגרל הזה מתכנס כאשר $\beta < 1$. לסיכום האינטגרל המקורי מתכנס כאשר $\alpha > -1$.

.3

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\tan(x)|^{\alpha} \mathrm{d}x$$

נסתכל רק על החלק

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\alpha}(x) \mathrm{d}x$$

היות והפונקציה זוגית, החלק השני יתנהג אותו דבר. אם $\alpha > 0$ אז הבעיה היא בנקודה $\frac{\pi}{2}$. נשווה עם $\frac{1}{\cos^{\alpha} x}$ ונראה בקלות האינטגרל מתכנס ומתבדר יחד עם

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^{\alpha} x} \mathrm{d}x$$

כעת נשווה את $-\frac{1}{\cos^{\alpha} x}$ עם $(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}})^{\alpha}$ ונקבל

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{-\cos x}{x-\frac{\pi}{2}})^{\alpha} = (\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{x-\frac{\pi}{2}})^{\alpha} = (\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1})^{\alpha} = 1$$

היות ו $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}})^{\alpha}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha < 1$ גם האינטגרל שלנו יתכנס כאשר $\alpha < 1$. עבור $\alpha = 0$ ברור שהאינטגרל מתכנס. נותר לבדוק עבור $\alpha < 0$. נכתוב את האינטגרל בתור

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\beta} x}{\sin^{\beta} x} \mathrm{d}x$$

כאשר $\beta = -\alpha > 0$ וברור שהבעיה היא ב 0. משיקולים דומים לקודם זה מתכנס אם ורק אם

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^{\beta} x} \mathrm{d}x$$

מתכנס. בדומה לקודם נוכל להשוות ל $\frac{1}{x^{\beta}}$ ונקבל שהאינטגרל מתכנס אם ורק אם $\beta < 1$. לסיכום האינטגרל מתכנס אם ורק אם $-1 < \alpha < 1$

שאלה 4

נשים לב כי

$$\int_{a}^{\infty} |f(x)f'(x)| \mathrm{d}x \le \int_{a}^{\infty} c|f(x)| \mathrm{d}x$$

היות ו $\int_a^\infty c|f(x)|\mathrm{d}x$ מתכנס גם $\int_a^\infty |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x$ מתכנס ולכן גם $\int_a^\infty f(x)f'(x)\mathrm{d}x$ מתכנס. כלומר קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש

$$L = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

נציב $t = f(x)$ ונקבל

$$L = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{f(a)}^{f(R)} t\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}(f(R)^2 - f(a)^2)$$

ולכן ברור כי $\lim\limits_{R\to\infty} f(R)$ הוא מספר, כלומר הגבול קיים.

נסמן $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, אם $a \neq 0$ אז אין סיכוי ש $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ יתכנס ולכן $a = 0$ כנדרש.

שאלה 5

אורך העקום של f בקטע מקיים

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \sqrt{(f'(x))^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \geq |\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x|$$
$$= |\lim_{R\to 0^+} \int_R^1 f'(x)\mathrm{d}x| = |\lim_{R\to 0^+} f(1) - f(R)| = \infty$$