פיסיקה למתמטיקאים

בעיית שני הגופים

1. שני גופים בעלי מסות m_1, m_2 ומיקומים $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ נעים בהשפעת כח מרכזי

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{x^3}\vec{x}, \tag{1}$$

כאשר $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ המרחק בין שני הגופים. הפוטנציאל המרכזי נתון ע"י

$$\varphi(x) = -\frac{Gm_1m_2}{x}. \tag{2}$$

ראינו בכיתה כי מרכז המסה $\vec{R}$ נע במהירות קבועה וכי האנרגיה נתונה ע"י

$$E = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{k}{x} = E_{cm} + E_0, \tag{3}$$

כאשר $k = Gm_1m_2$, $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, $M = m_1 + m_2$, E_{cm} האנרגיה הקי-נטית של מרכז המסה ו E_0 האנרגיה הכוללת המתארת תנועה ביחס למרכז המסה.

בקואורדינטות פולריות ניתן לרשום

$$E_0 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}. \tag{4}$$

מאחר והתנע הזויתי

$$J = \mu r^2\dot{\theta} \tag{5}$$

נשמר אפשר לרשום את (4) כ

$$E_0 = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}, \tag{6}$$

כאשר

$$\varphi_{eff} = \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \tag{7}$$

הפוטנציאל האפקטיבי. סידור איברים ב (6) נותן

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_0 + \frac{k}{r} - \frac{J^2}{2\mu r^2}\right)}} = dt. \tag{8}$$

נבצע כעת החלפת משתנים $u=1/r$ ונשתמש ב (5) על מנת לרשום

$$-\frac{du}{\sqrt{\frac{2E_0}{J^2}+\frac{2mk}{J^2}u-u^2)}}=d\theta. \tag{9}$$

האינטגרל באגף שמאל של (9) פתיר אנליטית ($\int\frac{du}{\sqrt{a+bu^2-u^2}}=\arccos\frac{2u-b}{\sqrt{b^2+4a}}$).

נקבל אפוא

$$r(\theta)=\frac{r_0}{1+\epsilon\cos\theta}, \tag{10}$$

כאשר $r_0=\frac{J^2}{\mu k},\ \epsilon=\sqrt{1+\frac{2E_0J^2}{\mu k^2}}$. משוואה (10) נקראת משוואת חתכי חרוט.

כאשר $(\epsilon>1)\ E_0>0$ המסלול היפרבולי.
כאשר $(\epsilon=1)\ E_0=0$ המסלול פרבולי.
כאשר $(0<\epsilon<1)\ -\frac{\mu k^2}{2J^2}<E_0<0$ המסלול אליפטי.
כאשר $(\epsilon=0)\ E_0=-\frac{\mu k^2}{2J^2}$ המסלול מעגלי.