6 תירגול 6

1. $V=\mathbb{R}^n$. נגדיר: $<v,u>=v^tu$.

   (א) לדוגמא: $<\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\10\end{pmatrix}>=1\cdot 0+2\cdot 4+3\cdot 10=38$.

   (ב) תרגיל: הוכח שזוהי אכן מ"פ.

   (ג) אותה הגדרה מעל $\mathbb{C}$- האם נותן ממ"פ?
   פתרון: לא. למשל: $<\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}>=-1<0$.

2. מעל $\mathbb{C}$: $<v,u>=v^t\bar{u}$.

   (א) לדוגמא: $<\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}>=i\cdot\bar{i}=1$.

3. אם v מאונך לכולם אז $v=0$.
   הוכחה: מאונך לעצמו, לכן ממ"פ עם עצמו = 0 ולכן 0.

4. מה צריך כדי לקבל: אם $\langle v_1,v\rangle=\langle v_2,v\rangle$ אז $v_1=v_2$.
   מספיק עבור בסיס כלשהו $B=\{u_i\}$, כי אז זה יהיה נכון על כל v ונקבל ש- v_1-v_2 מאונך לכולם.

5. יהא $V=\mathbb{R}^n$ ותהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. נגדיר פונקציה $\langle v,u\rangle=(Av)^t\,Au$ הוכיחו כי A הפיכה אמ"מ $\langle v,u\rangle$ מ"פ
   הוכחה: נניח A הפיכה ונוכיח כי $\langle v,u\rangle$ מ"פ

   - לינאריות:

$$\langle\alpha v_1+v_2,v\rangle=(A(\alpha v_1+v_2))^t\,Av=(\alpha Av_1+Av_2)^t\,Av=\left(\alpha\,(Av_1)^t+(Av_2)^t\right)Av=$$

$$=\alpha\,(Av_1)^t\,Av+(Av_2)^t\,Av=\alpha\,\langle v_1,v\rangle+\langle v_2,v\rangle$$

   - סימטריות

$$\langle v,u\rangle=(Av)^t\,Au=\left((Av)^t\,Au\right)^t=(Au)^t\,Av=\langle u,v\rangle$$

   - אי שליליות: $\langle v,v\rangle=(Av)^t\,Av=\sum_i(Av)_i^2\geq 0$ ומתקיים שיוויון אמ"מ לכל i $(Av)_i=0$ אמ"מ $Av=0$ אמ"מ $v=0$ כי A הפיכה.

   מצד שני נניח A אינה הפיכה אזי קיים $v\neq 0$ כך ש $Av=0$ ואז $\langle v,v\rangle=(Av)^t\,Av=0^t0=0$ ולכן $\langle v,u\rangle$ אינה מ"פ.

6. $B^* = \bar{B}^t$ כאשר $< A, B >= tr(AB^*)$.

7. אם $\langle Tv, v\rangle = 0$ אזי $T = 0$?

8. יהא V ממ"פ . $B = \{v_i\}$ בסיס יהיו $\{c_i\}$ סקלארים . הוכיחו כי קיים v כך ש $\langle v, v_i\rangle = c_i$.

פתרון: נסמן $v = \sum_i \alpha_i v_i$ ונראה שקיימים α_i שמקימים את הדרישה. אכן מהסימון והדרישה נקבל כי

$$c_k = \langle v, v_k\rangle = \sum_i \alpha_i \langle v_i, v_k\rangle$$

זהו מערכת משוואות עם n משוואות ו n נעלמים. בכתיב מטריצה נקבל

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_1, v_3\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \langle v_2, v_3\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \langle v_3, v_1\rangle & \langle v_3, v_2\rangle & \langle v_3, v_3\rangle & \cdots & \langle v_3, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \langle v_n, v_3\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} = (c_1, \ldots, c_n)$$

כיוון שמטריצת גרם הפיכה נקבל כי $\alpha = cG_B^{-1}$.

9. בממ"פ מעל $\mathbb{R}$ הוכיחו כי $\|v\| = \|w\|$ אמ"מ $(v - w) \perp (v + w)$

(א) פתרון: אם $\langle v - w, v + w\rangle = 0$ נקבל כי $\|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$ וסימנו.
בכיוון השני $\langle v - w, v + w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$

10. אי שיוון קושי שוורץ: יהי V ממ"פ.

אזי לכל $x, y \in V$ מתקיים $| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$. כאשר $|| \cdot ||$ הינה הנורמה המושרת.

(א) תרגיל: יהיו $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ הוכח: $(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$.

פתרון: נסתכל ב $V = \mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. נגדיר $x = (a_1, \ldots a_n)$, $y = (1, \ldots, 1)$ אזי לפי אי שיוון קושי שוורץ מתקיים: $| < x, y > |^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$
כלומר $|(a_1 + \cdots + a_n)^2| \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$

11. יהא V ממ"פ. נגדיר $S = \{u \in V :\| u \|= 1\}$ (עבור הנורמה המושרית). יהא $0 \neq v \in V$. הוכיחו כי $\min\{\| v - u \|: u \in S\}$ מתקבל עבור הנרמול של v.
הוכחה: עבור הנרמול של v נקבל:

$$\left\|v - \frac{v}{\| v \|}\right\|^2 = \left\|v\left(1 - \frac{1}{\| v \|}\right)\right\|^2 = \left|1 - \frac{1}{\| v \|}\right|^2 \| v \|^2 = (\| v \| - 1)^2 = \| v \|^2 - 2 \| v \| + 1$$

ואילו עבור $u \in S$ נקבל:

$$\| v - u \|^2 = \langle v - u, v - u\rangle = \langle v, v - u\rangle - \langle u, v - u\rangle = \overline{\langle v - u, v\rangle} - \overline{\langle v - u, u\rangle} =$$

$$= \| v \| - \langle v, u\rangle - \overline{\langle v, u\rangle} + \| u \| = \| v \| - 2Re(\langle v, u\rangle) + \| u \|$$

ולכן מה שצ"ל זה שמתקיים: $Re(\langle v,u\rangle)\leq\| v \|$. ואכן, לפי קושי־שוורץ:

$$Re(\langle v,u\rangle)\leq|\langle v,u\rangle|\leq\| v \|\cdot\| u \|=\| v \|$$

12. יהא V מ"פ ויהא $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ בסיס או"נ יהו $v_1,\ldots,v_n$ וקטורים המקיימים

$$\forall i\ \|e_i-v_i\|<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

הוכיחו כי $\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס ל V.
הוכחה: מ"ל כי הם בת"ל ונקבל את המבוקש מהשלישי חינם. נניח בשלילה כי הם ת"ל אזי קיים צ"ל שמתאפס $\sum_i\alpha_iv_i=0$ כך שקיים i המקיים $\alpha_i\neq 0$. נסמן $d_i=e_i-v_i$ אזי

$$\sum_i\alpha_i\left(e_i+d_i\right)=\sum_i\alpha_iv_i=0$$

ואז

$$\sum_i\alpha_ie_i=-\sum_i\alpha_id_i$$

נוציא נורמה על שני האגפים ונקבל

$$\|\sum_i\alpha_ie_i\|=\|\sum_i\alpha_id_i\|$$

נשתמש בתרגילים הקודמים לקבל

$$\sum_i|\alpha_i|^2=\|\sum_i\alpha_ie_i\|^2=\|\sum_i\alpha_id_i\|^2\leq\left(\sum_i|\alpha_i|\cdot\|d_i\|\right)^2<\left(\sum_i|\alpha_i|\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_i|\alpha_i|\right)^2\leq\frac{1}{n}\cdot n\sum_i|\alpha_i|^2=\sum_i|\alpha_i|^2$$

סתירה.