אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 1

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

1. הוכח כי אם בחוג R, לכל $x \in R$ מתקיים $x^2 = x$ אזי R קומוטטיבי. [רמז: מהו $(x+y)^2$?]

2. תהי S קבוצה. נסמן $R = P(S)$ (קבוצת החזקה). בכל סעיף אמור האם R הוא חוג בהינתן הפעולות הנתונות. אם כן אז אמור מהו איבר אפס ומהו איבר היחידה ותן נוסחא לאיבר הנגדי:
   a. $A + B = A \cup B$, $A \cdot B = A \cap B$.
   b. $A + B = A \cup B \setminus (A \cap B)$, $A \cdot B = A \cap B$.

3. יהי R חוג ויהי איבר $0 \neq z \in R$ שעבורו קיים $w \neq 0$ כך ש $zwz = 0$. הוכח או הפרך:
   a. z מחלק אפס.
   b. $zw = wz = 0$.

4. האם הקבוצות הבאות של מטריצות מהוות חוגים לפי הפעולות הסטנדרטיות כאשר F שדה:
   a. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(F)$.
   b. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & c \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(F)$.

5. מצאו את כל תת-החוגים של $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ [חיבור וכפל רכיב-רכיב]. אמרו לאילו מהם יש יחידה ולאילו אין.