הגדרה: נאמר שסדרה $x_n \to x$ אם לכל ϵ, קיים איזשהו n_0 כך שלכל $n > n_0$, $x_n \in B(x,\epsilon)$. כלומר, החל ממקום מסויים, $d(x_n,x) < \epsilon$.

הוכחתם בהרצאה תנאי שקול להתכנסות: $x_n \to x$ אמ"ם $d(x_n,x) \to 0$. סדרת המרחקים היא כבר סדרה ממשית.

דוגמא: $(\mathbb{Z}, d_3)$. הוכיחו שהסדרה $2\cdot 3^n + 5 \to 5$.

הוכחה:

$$d(2\cdot 3^n + 5, 5) = \frac{1}{3^n} \to 0$$

תרגיל: ב-l_∞ מרחב הסדרות הממשיות החסומות. זה מרחב נורמי

$$||(x_n)|| = \sup |x_n|$$

ולכן יש מטריקה.

תהי סדרה של סדרות

$$(x_n^i)$$

$$x_n^1$$

הסדרה הראשונה. זאת סדרה חסומה כלשהי.

$$x_n^2$$

הסדרה השניה. גם היא סדרה חסומה.

תהי x_n סדרה חסומה שמהווה הגבול.

$$x_n^i \to x_n$$

האם ההתכנסות גוררת התכנסות בכל רכיב?

כלומר, עכשיו אפשר לייצר סדרה בממשיים של כל הרכיבים הראשונים. ולשאול האם הסדרה הממשית הזאת מתכנסת לרכיב הראשון בסדרת הגבול.

וכנ"ל לגבי כל אחד מהרכיבים.

הוכחה: אם

$$x_n^i \to x_n$$

אז

$$d(x_n^i, x_n) \to 0$$

$$\sup_n |x_n^i - x_n| \to 0$$

ולכן לכל n

$$|x_n^i - x_n| \to 0$$

כלומר

$$x_n^i \to x_n$$

שאלה הפוכה: האם הכיוון השני נכון? כלומר, אם אנחנו יודעים שיש התכנסות בכל רכיב, האם יש התכנסות של הסדרות?
הפרכה:

$$(1, 0, 0, 0..)$$

$$(0, 1, 0, 0, ...)$$

$$(0, 0, 1, 0, ...)$$

בכל רכיב הסדרה שמתקבלת היא קבועה לבסוף על 0.
אבל הסדרה הנ"ל לא מתכנסת לסדרה $(0, 0, 0, ...)$, כי המרחק של כל איבר בסדרה מה"גבול המבוקש" הוא תמיד 1.
הגדרה: סדרה $\{x_n\}$ נקראת סדרת קושי אם לכל ϵ יש n_0 כך שלכל $n, m > n_0$ $d(x_n, x_m) < \epsilon$.
תרגיל: הוכיחו שכל סדרה מתכנסת היא קושי.
הוכחה: נתון $x_n \to x$. יהי ϵ. יש n_0 שהחל ממנו $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. ולכן לכל $n, m > n_0$

$$d(x_m, x_n) \le d(x_m, x) + d(x, x_n) < \epsilon$$

תרגיל: הוכיחו שכל סדרת קושי היא קבוצה חסומה. (מוכלת בכדור, המרחק בין כל שני איברים חסום).
פתרון: נקח $\epsilon = 1$. אנחנו יודעים מn מסויים המרחק בין כל שני איברים בסדרה קטן מ1.
נסתכל על x_{n+1}. יש מספר סופי של איברים לפניו, נסמן

$$r = \max_{1 \le i \le n} \{d(x_{n+1}, x_i)\}$$

לכל שני איברים בסדרה, אם שניהם אחרי x_{n+1} אז המרחק בינהם קטן מ1.
אם אחד מהם אחרי ואחד לפני, אז לפי איש שוויון המשולש המרחק בינהם קטן מ$r + 1$.
ואם שניהם קטנים מx_{n+1} אז המרחק בינהם קטן מ$2r$ לפי אי שוויון המשולש.
אפשר גם להגיש שהסדרה מוכלת בכדור $B(x_{n+1}, r + 1)$
הגדרה: מרחב מטרי נקרא "שלם" אם כל סדרת קושי מתכנסת.
באינפי הוכחתם ש$\mathbb{R}$ עם המטריקה האוקלידית הוא מרחב שלם.

תרגיל: נסתכל על $C[0,1]$ מרחב הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ עם הנורמה

$$||f||=\int_0^1|f|dx$$

הוכיחו שזה מרחב לא שלם.

מטרה: להוכיח ש$(\mathbb{Z},d_p)$ הוא מרחב לא שלם. נוכיח עבור $p\neq 2$ אבל הטענה נכונה גם עבור $p=2$.

שלב ראשון: נוכיח שאם $x_n\to x$ המטריקה הp אדית, אז $cx_n\to cx$.

הוכחה:

$$d(cx_n,cx)=?$$

כל האיברים בסדרה ששוים לcx המרחק הוא 0, אז אפשר להתעלם מהם.

נסתכל על הרכיבים שבהם

$$cx_n\neq cx$$

$$d(cx_n,cx)=\frac{1}{p^{k(cx_n,cx)}}\leq\frac{1}{p^{k(x_n,x)}}=d(x_n,x)\to 0$$

$$k(cx_n,cx)=$$

אנחנו מחפשים את החזקה המקסימלית של p שמחלקת את $cx_n-cx=c(x_n-x)$ וזה גדול שווה מהחזקה המקסימלית שמחלקת את x_n-x.

אתגר: תנו דוגמא למטריקה מעל $\mathbb{R}$ שבה כפל בסקלר לא שומר על התכנסות. כלומר יתכן ש$x_n\to x$ אבל $cx_n\nrightarrow cx$.

פתרון:

$$f(1)=2,f(2)=1,f(x)=x$$

$$d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$$

$$1+\frac{1}{n}\to 2$$

$$3+\frac{3}{n}\to 3$$

נמשיך הלאה עם הוכחת אי ההשלמות של המטריקה הp אדית:

נסתכל על הסדרה:

$$x_n=\sum_{i=0}^{n}p^i=\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$$

ראשית נראה שx_n היא סדרת קושי.

$$d(x_n, x_m) = ?$$

ההפרש בין x_n לx_m הוא $p^{n+1} + ... + p^m$. החזקה הכי גבוהה של p שמחלקת היא $n+1$

$$d(x_n, x_m) = \frac{1}{p^{n+1}}$$

תמיד אפשר לבחור n מספיק גדול כדי שהמרחק יהיה קטן מϵ.
נניח ש$x_n \to x$

$$\frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} \to x$$

נכפיל ב$p-1$

$$p^{n+1} - 1 \to (p-1)x$$

אבל ידוע ש

$$p^{n+1} - 1 \to -1$$

גבול הוא יחיד. אז

$$-1 = (p-1)x$$

אבל $p \neq 2$, ולכן נקבל שx לא שלם. אבל המרחב שלנו הוא $\mathbb{Z}$. סתירה!
הגדרה: קבוצה A נקראת פתוחה אם לכל $x \in X$ קיים איזשהו r כך ש$B(x,r) \subseteq X$.
קבוצה נקראת סגורה אם X^c היא פתוחה. אם קבוצה היא גם פתוחה וגם סגורה אז היא נקראת סגוחה.
תרגיל: הויכחו שכדור סגור $B[x,r] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ הוא קבוצה סגורה.
הוכחה: צריך להראות שהמשלים פתוח. כלומר, שאם $y \in B[x,r]^c$ אז יש איזשהו ϵ כך ש$B(y,\epsilon) \subseteq B[x,r]^c$
$d(y,x) > r$. זה ההגדרה של המשלים. אז $\epsilon = d(y,x) - r > 0$. נוכיח ש $B(y,\epsilon) \subseteq B[x,r]^c$. נקח $a \in B(y,\epsilon)$.

$$d(y,x) \leq d(a,y) + d(a,x)$$

$$d(a,x) \quad \geq \quad d(y,x) - d(a,y) > d(y,x) - \epsilon = r$$

מש"ל.

תרגיל: בl_∞ הוכיחו שקבוצת הסדרות הקבועות היא סגורה.

פתרון: צריך להוכיח שהמשלים פתוח. כלומר, שלכל נקודה במשלים, סדרה חסומה עם לפחות שני רכיבים שונים יש כדור סביבה שאין בו שום סדרה קבועה.

יש בסדרה שני איברים שונים $x_n = a \neq b = x_m$. נקח $r = \frac{|b-a|}{3}$. לכל סדרה y_n שהמרחק שלה מהסדרה שלנו קטן מr (כלומר היא נמצאת בכדור ברדיוס r סביב הסדרה שלנו), הסופרימום של המרחקים בכל רכיב קטן מr, אז כל אחד מהמרחקים בכל רכיב קטן מr. אז $|y_n - a| < r, |y_m - b| < r$. אז $y_m \neq y_n$.

תזכורת: הוכחתם בהרצאה שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה ושאיחוד של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

טענה: במרחב מטרי כל קבוצה סגורה היא חיתוך של מספר בן מניה של קבוצות פתוחות.

הוכחה: תהי A קבוצה סגורה.

$$O_n = \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{1}{n})$$

כל O_n היא קבוצה פתוחה כאיחוד של כדורים פתוחים.

נראה ש

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

A מוכל בחיתוך, כי הוא מוכל בכל אחת מהקבוצות, כי כל $a \in A$ נמצא ב$B(a, \frac{1}{n})$

כעת יהי $x \notin A$. אז יש n כך ש$B(x, \frac{1}{n}) \subseteq A^c$ כי A סגורה. לכן

$$B(x, \frac{1}{n}) \cap A = \emptyset$$

זה אומר שאין שום נקודה בA שהמרחק שלה מx קטן מ$\frac{1}{n}$. ולכן $x \notin O_n$. מצאנו קבוצה שהוא לא נמצא בה, לכן הוא לא בחיתוך.

הגדרה: מטריקות d, ρ על אותה קבוצה X יקראו שקולות אם

$$x_n \to_d x \iff x_n \to_\rho x$$

לדוגמא: אם d היא מטריקה על X, אז לכל $\alpha > 0$ המטריקה αd

$$(\alpha d)(x, y) = \alpha \cdot d(x, y)$$

שקולה לd.

הוכחה: מצד אחד אם $x_n \to_d x$ זה אומר ש$d(x_n, x) \to 0$ ולכן $(\alpha d)(x_n, x) = \alpha \cdot d(x_n, x) \to 0$

הכיוון השני אותו דבר עם $\frac{1}{\alpha}$.

תרגיל: על l_1 מרחב הסדרות שהטור שלהן מתכנס בערך מוחלט ניתן להגדיר 2 מטריקות:
מטריקת l_1

$$||x_n|| = \sum |x_n|$$

וניתן להגדיר עליה גם את מטריקת הסופרימום.
הוכיחו שהמטריקות האלה לא שקולות.
פתרון: נסתכל על הסדרה

$$(1, 0, 0, ., , ,)$$

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, ...)$$

$$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, , ...)$$

וכו'
במטריקת הסופרימום הסדרה מתכנסת ל$(0, 0, 0, 0, ...)$
אבל במטריקת l_1 המרחק של הסדרה מ$(0, 0, 0, ...)$ הוא תמיד 1. ולכן אין התכנסות.