אלגברה לינארית למהנדסים – תרגיל בית 5

תאריך הגשה: 07.05.2017 (שימו לב – זהו יום ראשון לפני הבוחן)

1. הוכח או הפרך שהקבוצות הבאות מהוות מרחב וקטורי:

(א) $V = \mathbb{F} = \mathbb{C}$ עם החיבור הרגיל של $\mathbb{C}$ ועם כפל בסקלר:

$$\forall \alpha \in \mathbb{F}, v \in V \quad \alpha \boxdot v = (Re\alpha)v$$

(ב) $V = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ עם הפעולות:

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 \boxplus v_2 = v_1 \cdot v_2$$

$$\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \boxdot v = v^\alpha$$

רמז: איבר האפס של V אינו 0.

2. הזכרו בהגדרה של פעולת חיבור פונקציות וכפל בסקלר מתרגול. קבעו האם הקבוצות הבאות מהוות מ"ו מעל $\mathbb{R}$ והוכיחו את טענותכם:

(א) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \, f(3) = 0\}$

(ב) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \, f(3) = 3\}$

3. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $\mathbb{R}$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{Q}$ עם החיבור הרגיל וכפל בסקלר:

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot x = \alpha x$$

(ב) יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ תת־שדה (ראה הגדרה מהתרגול) ויהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, הראו שהיא מהווה גם מ"ו מעל $\mathbb{K}$ עם אותן הפעולות.

4. נגדיר על $\mathbb{R}^2$ חיבור וכפל בסקלר מ־$\mathbb{R}$ בצורה הבאה:

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad (x_1, y_1) \boxplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$

$$\forall x, y, c \in \mathbb{R} \quad c \boxdot (x, y) = (cx + c - 1, cy + c - 1)$$

האם $\mathbb{R}^2$ עם הפעולות הנ"ל מהווה מ"ו מעל $\mathbb{R}$? הוכיחו את טענתכם.

5. עבור כל אחת מתת־הקבוצות הבאות של $\mathbb{R}^3$, הוכיחו או הפריכו כי תת־קבוצה זו מהווה תת־מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$:

(א) $$\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x_1+2x_2+3x_3=0\right\}$$

(ב) $$\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x_1+2x_2+3x_3=4\right\}$$

(ג) $$\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x_1x_2x_3=0\right\}$$

(ד) $$\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x_1x_2\in\mathbb{Q}\right\}$$

(ה) $$\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x_1+x_2+x_3=0 \; and \; x_1-2x_2+\pi x_3=0\right\}$$

6. יהי F שדה, יהי V מ"ו מעל F ויהיו $U_1,U_2\subseteq V$ תתי־מרחבים.

(א) האם האיחוד $U_1\cup U_2$ הוא תמיד תת־מרחב וקטורי של V? הוכיחו או תנו דוגמא נגדית.

הזכרו כי הסכום U_1+U_2 מוגדר בצורה הבאה:

$$U_1+U_2=\{u_1+u_2 \,|\, u_1\in U_1,\ u_2\in U_2\}$$

הוכיחו את הטענות הבאות:

(ב) U_1+U_2 הוא תת־מרחב וקטורי של V.

(ג) U_1+U_2 הוא תת־המרחב המינימלי של V המכיל את U_1 ואת U_2 (כלומר אם $W\subseteq V$ תת־מרחב ומתקיים $U_1,U_2\subseteq W$ אז גם $U_1+U_2\subseteq W$).

(ד) $U_1\cup U_2$ הוא תת־מרחב וקטורי אם"ם $U_1\subseteq U_2$ או $U_2\subseteq U_1$