בס"ד

חשבון אינפי מתקדם
תרגיל 9
אינטגרלים משולשים

1. חשבו את האינטגרל המשולש : $\iiint\limits_G y\, dxdydz$,

G הוא הגוף המוגבל על ידי המישור $z=y$, מישור xy והגליל הפרבולי $y=1-x^2$.

<u>פתרון:</u>

ניתן לתאר את G על ידי : $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1-x^2 \\ 0\le z\le y \end{cases}$ ולכן

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1-x^2}dy\int_{0}^{y}ydz=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1-x^2}yz\Big|_0^y dy=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1-x^2}y^2dy=\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{1-x^2}dx=$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\left(1-x^2\right)^3}{3}dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left(1-3x^2+3x^4-x^6\right)dx=\frac{1}{3}\left(x-x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$\frac{1}{3}\left(1-1+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{3}\left(-1+1-\frac{3}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{7}\right)=\frac{32}{105}$$

2. חשבו את נפח הגוף בעזרת אינטגרל משולש:

א. הגוף בתומן הראשון , ז"א $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, החסום על ידי מישורי הצירים והמישור $3x+6y+4z=12$.

<u>פתרון:</u>

$V_G=\iiint\limits_G dxdydz$ כאשר G נתון על ידי

$$\begin{cases} 0\le z\le 3-\frac{3}{4}x-\frac{6}{4}y \\ 0\le x\le 4-2y \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

ולכן

$$V_G=\int_0^2 dy\int_0^{4-2y}dx\int_0^{3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}y}dz=\int_0^2 dy\int_0^{4-2y}\left(3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}y\right)dx=\int_0^2\left(3x-\frac{3}{4}\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}yx\right)\Bigg|_0^{4-2y}dy$$

$$=\int_0^2\left(3(4-2y)-\frac{3}{8}(4-2y)^2-\frac{3}{2}y(4-2y)\right)dy=$$

$$=12y-3y^2-\frac{3}{8}\left(16y-16\frac{y^2}{2}+\frac{4}{3}y^3\right)-\frac{6y^2}{2}+y^3\Bigg|_0^2=8-4=4$$

ב. הגוף הכלוא בגליל האליפטי $x^2+9y^2=9$, בין המישורים $z=0$ ו- $z=x+3$.

<u>פתרון:</u>

$$V_G=\iiint_G dxdydz=\iint_R\left(\int_0^{x+3}dz\right)dxdy$$

כאשר $R=\left\{(x,y):\frac{x^2}{3^2}+y^2\le 1\right\}$ הוא ההיטל של G על המישור $z=0$.

$$V_G=\iint_R\left(\int_0^{x+3}dz\right)dxdy=\iint_R(x+3)dxdy$$

נעבור לקואורדינאטות קוטביות :

$$\begin{cases}x=3r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

$$0\le r\le 1$$

$$0\le\theta\le 2\pi$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=3r$$

$$V_G=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(3r\cos\theta+3)\cdot 3rdr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(9r^2\cos\theta+3r\right)dr\right)d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(3r^3\cos\theta+\frac{9}{2}r^2\right)\Bigg|_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\left(3\cos\theta+\frac{9}{2}\right)d\theta=3\sin\theta+\frac{9}{2}\theta\Bigg|_0^{2\pi}=9\pi$$

3. בעזרת ההעתקה $u=x,v=z-y,w=xy$ חשבו את $\iiint_G (z-y)^2xy\,dxdydz$

כאשר G הוא התחום המוגבל על ידי המשטחים $x=1,x=3,z=y,z=y+1,xy=2,xy=4$.

<u>פתרון:</u>

נסמן:

$$\begin{aligned}
&u = x\\
&v = z - y\\
&w = xy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1 \le x \le 3 &&\Rightarrow\ 1 \le u \le 3\\
&0 \le z - y \le 1 &&\Rightarrow\ 0 \le v \le 1\\
&2 \le xy \le 4 &&\Rightarrow\ 2 \le w \le 4
\end{aligned}$$

נחשב את היעקוביאן :

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \frac{1}{u} \Leftarrow \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right| = x \Leftarrow \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = -x$$

ולכן

$$\iiint\limits_G (z-y)^2 xy\ dxdydz = \int_1^3 du \int_0^1 dv \int_2^4 v^2 w \frac{1}{u} dw = \int_1^3 du \int_0^1 \frac{v^2}{u} \frac{w^2}{2}\Big|_2^4 dv = \int_1^3 du \int_0^1 \frac{v^2}{u}(8-2)\, dv$$

$$= 6\int_1^3 \frac{1}{u} \frac{v^3}{3}\Big|_0^1 du = 2\int_1^3 \frac{1}{u} du = 2\ln u\Big|_1^3 = 2\ln 3$$

4. על ידי מעבר לקואורדינאטות כדוריות חשבו את האינטגרל $\iiint\limits_G (yz + zx)\ dxdydz$ כאשר G נמצא בתומן הראשון, ז"א $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ ומוגבל על ידי המשטחים $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = x$, $z = 0$, $x = 0$.

<u>פתרון:</u>

$$G = \left\{(x,y,z) \in R^3 : y \ge x\ ,\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\ , x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\right\}$$

נעבור לקואורדינאטות כדוריות:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$z \ge 0 \qquad \Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{matrix} y \ge x \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r\sin\theta\sin\varphi \ge r\cos\theta\sin\varphi \Rightarrow \sin\theta \ge \cos\theta \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \qquad \Rightarrow 0 \le r \le R$$

ולסיכום:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le R \end{cases} \qquad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = r^2 \sin\varphi$$

ולכן

$$\iiint_G (yz+zx)\,dxdydz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^4 \sin^2\varphi\cos\varphi\left(\sin\theta+\cos\theta\right)dr =$$

$$\frac{R^5}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi\left(\sin\theta+\cos\theta\right)d\varphi$$

$$\sin\varphi = p \qquad \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0$$

$$\cos\varphi d\varphi = dp \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad p = 1$$

$$= \frac{R^5}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 p^2\left(\sin\theta+\cos\theta\right)dp = \frac{R^5}{15}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta+\cos\theta\right)d\theta = \frac{R^5}{15}\left(\sin\theta-\cos\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^5}{15}$$

טל"ח