פתרון תרגיל 10 – ליניארית 2 מדמ"ח

שאלה 1

נסמן ב- P_1 את מטריצת ההטלה על ווקטור $a_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$, וב- P_2 את מטריצת ההטלה על ווקטור $a_2=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$. חשבו את P_1,P_2 והסבירו מדוע $P_1P_2=0$.

פתרון:

$$P_1=\frac{a_1a_1^t}{a_1^ta_1}=\frac{\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}(-1,2,2)}{(-1,2,2)\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&4&4\\-2&4&4\end{pmatrix}$$

$$P_2=\frac{a_2a_2^t}{a_2^ta_2}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4&4&-2\\4&4&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$$

מתקיים $P_1P_2=0$ מכיוון ששני הווקטורים עליהם מטילים הם אורתוגונאליים (מאונכים אחד לשני). לכן, אם תחילה מטילים ווקטור v כלשהו על a_2, אזי מקבלים כפולה כלשהי של a_2, ואז כשמטילים את הכפולה הזאת על a_1 נקבל אפס, מכיוון שהם מאונכים.

שאלה 2

תהי $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. הטילו את $b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ על מרחב העמודות של A. מהו ווקטור השגיאה?

פתרון:

נמצא את מטריצת ההטלה:

$P=A\left(A^tA\right)^{-1}A^t=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ולכן $Pb=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}$.

וקטור השגיאה הוא: $e = b - p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

<u>שאלה 3</u>

מצאו את הפרבולה שעוברת הכי קרוב לנקודות $(3,0),(2,0),(1,1),(1,0)$.

<u>פתרון:</u>

אנו מחפשים פרבולה $b = C + Dt + Et^2$. נציב בה את הנקודות הנתונות ונקבל את מערכת המשוואות $\begin{cases} 0 = C + D + E \\ 1 = C + D + E \\ 0 = C + 2D + 4E \\ 0 = C + 3D + 9E \end{cases}$, ז"א $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. קל לראות שלמערכת $Ax = b$

אין פתרון, מכיוון ש- b לא שייך למרחב העמודות של A. עם זאת, מכיוון שעמודות של המטריצה הן בת"ל, למערכת הנורמלית $A^t Ax = A^t b$ יש פתרון יחיד. לכן נוכל להשתמש בשיטת הריבועים המופחתים (Least Squares Method). נטיל את b על מרחב העמודות של A:

$p = A\left(A^t A\right)^{-1} A^t b = \begin{pmatrix} 236 \\ 236 \\ 748 \\ 1562 \end{pmatrix}$. הפתרון הרצוי הוא פתרון מערכת המשוואות $A\hat{x} = p$ והוא:

$\hat{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 59 \\ 151 \end{pmatrix}$ ולכן הפרבולה היא $b = 26 + 59t + 151t^2$.

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו את התכונות הבאות של המרחב הניצב:

א. $\{0\}^{\perp} = V$

ב. $V^{\perp} = \{0\}$

ג. אם $S_1 \subseteq S_2$ אזי $S_1^{\perp} \supseteq S_2^{\perp}$

ד. לכל קבוצה $S \subseteq V$ מתקיים $span(S)^{\perp} = S^{\perp}$

<u>פתרון:</u>

א. $\{0\}^{\perp} = \{v \in V : \langle v, 0 \rangle = 0\}$ אך זה נכון לכל ווקטור במרחב (מתכונות המכפלה הפנימית) ולכן $\{0\}^{\perp} = V$.

ב. $V^{\perp}=\left\{v\in V:\ \langle v,u\rangle=0\ \ \forall u\in V\right\}$. ואם $\langle v,u\rangle=0\ \ \forall u\in V$ אזי זה בפרט נכון עבור $u=v$; אבל אם $\langle v,v\rangle=0$ אז $v=0$. ולכן $V^{\perp}=\{0\}$.

ג. יהי $x\in S_2{}^{\perp}$ אזי $\langle x,u\rangle=0$ לכל $u\in S_2$. אך מכיוון ש- $S_1\subseteq S_2$ ולכן $\langle x,u\rangle=0$ לכל $u\in S_1$ ולכן $x\in S_1{}^{\perp}$.

ד. נוכיח הכלה דו כיוונית:

$\subseteq$: יהי $x\in span(S)^{\perp}$ אזי $\langle x,u\rangle=0$ לכל $u\in span(S)$. ובפרט, מכיוון שלכל $s\in S$ מתקיים $s\in span(S)$ אזי $\langle x,s\rangle=0$ לכל $s\in S$ ולכן $x\in S^{\perp}$.

$\supseteq$: יהי $x\in S^{\perp}$ אזי $\langle x,s\rangle=0$ לכל $s\in S$. יהי $u\in span(S)$ אזי קיימים $a_1,...,a_n\in F,\ s_1,...,s_n\in S$ כך ש- $u=a_1s_1+...+a_ns_n$. מתקיים $\langle u,x\rangle=a_1\langle s_1,x\rangle+...+a_n\langle s_n,x\rangle=0$ ולכן $x\in span(S)^{\perp}$.

<u>שאלה 5</u>

מצאו בסיס ל- $W^{\perp}$ כאשר $W=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ והמכפלה הפנימית היא $\langle v,u\rangle=v^tAu$ עבור $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

יהי $(a,b,c)\in W^{\perp}$ אזי חייב להתקיים $\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0$. נפתור:

$$\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle=(a,b,c)\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=4a+8b+8c=0$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=(a,b,c)\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=a+3b+3c=0$$

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל: $a=0,\ b=-c$ ולכן $W^{\perp}=span\{(0,-1,1)\}$