מתמטיקה בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשעט, מועד א'

28.8.2019, כ"ז אב תשעט

מרצים: גברת תמר בר־און, ד"ר אפי כהן, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: עדי בן־צבי, אחיה בר־און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, עובד נגר, עומר נטר, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות.
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד.
  ניתן להשתמש במחברת כטיוטא, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A,B,C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A\times B)=P(A)\times P(B)$.

i. פתרון: הפרכה: עבור $A=B=\emptyset$ נקבל כי $P(A\times B)=\{\emptyset\}\neq\{(\emptyset,\emptyset)\}=P(A)\times P(B)$.

(ב) $(A\times B)\setminus(A\times C)=A\times(B\backslash C)$

פתרון: הוכחה: $(\subseteq)$ יהא $y\in(A\times B)\setminus(A\times C)$ אזי $y\in A\times B$ ולכן קיימים $a\in A,b\in B$ כך ש $y=(a,b)$. כיוון ש $(a,b)=y\notin A\times C$ נקבל כי $b\notin C$. ולכן $b\in B\backslash C$ ומכאן ש $y=(a,b)\in A\times(B\backslash C)$.

$(\supseteq)$יהא $y\in A\times(B\backslash C)$ אזי קימים $a\in A,b\in B\backslash C$ כך ש $y=(a,b)$. מהגדרה $b\in B,b\notin C$ ולכן $(a,b)\in A\times B,(a,b)\notin A\times C$ ולכן $y=(a,b)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$

(ג) אם $A\in B$ ו $B\in C$ אז $A\in C$

פתרון: הפרכה:$A=\emptyset,B=\{A\},C=\{B\}$ מקיימות את ה"אם" אבל $A\notin C$.

(ד) אם $C\backslash A=C\backslash B$ אז $C\cap A=C\cap B$

פתרון: הוכחה: כיוון ש $C=(C\cap B)\cup(C\backslash B),C=(C\cap A)\cup(C\backslash A)$ ושני האיחודים זרים נוכל לחשוב על C כקבוצה אוניברסלית ו $C\backslash A,C\backslash B$ כתתי קבוצות שלה. כעת נניח כי $C\backslash A=C\backslash B$ ולכן $C\cap A=(C\backslash A)^c=(C\backslash B)^c=C\cap B$ כנדרש.

דף נוסף לשאלה מספר___

2. (15 נק')

(א) (5 נק') כמה עוצמות שונות יש בקבוצה הבאה: $\left\{\left|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\right|,\left|P\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\right)\right|,\left|P\left(P\left(\mathbb{Z}\right)\right)\right|,\left|P\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)\right|\right\}$.

פתרון: בעזרת אריתמטיקה של עוצמות:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\right| &= \aleph_0^{א} = 2^{א}\\ \left|P\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\right)\right| &= 2^{א\times א} = 2^{א}\\ \left|P\left(P\left(\mathbb{Z}\right)\right)\right| &= 2^{\left(2^{\aleph_0}\right)} = 2^{א}\\ \left|P\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)\right| &= 2^{\left(א^{א}\right)} = 2^{\left(2^{א}\right)}\end{aligned}$$

ולכן יש רק 2 עוצמות שונות (כיוון שעבור $a=2^{א}$ מתקיים כי $a<2^a$).

(ב) (10 נק') מצאו את העוצמה של הקבוצה $A=\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid f^{-1}[\{1\}]=f^{-1}[\{2\}]\right\}$ (התשובה צריכה להיות אחת מהבאות: עוצמה סופית, $2^{א},א,\aleph_0$).

פתרון: נשים לב כי עבור $f\in A$ מתקיים כי $f^{-1}[\{1\}]=f^{-1}[\{2\}]$. ולכן

$$f^{-1}[\{1\}]=f^{-1}[\{2\}]=f^{-1}[\{1\}]\cap f^{-1}[\{2\}]=f^{-1}[\{1\}\cap\{2\}]=f^{-1}[\emptyset]=\emptyset$$

כלומר ל $1,2$ אין מקור. ולכן

$$A=\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid f^{-1}[\{1\}]=f^{-1}[\{2\}]\right\}=\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid Im(f)\subseteq\mathbb{N}\backslash\{1,2\}\right\}$$

ולכן נוכל להגדיר פונקציה $F:A\to\left(\mathbb{N}\backslash\{1,2\}\right)^{\mathbb{N}}$ ע"י $F(f)=f$ שהיא חח"ע ועל ולכן

$$|A|=\left|\left(\mathbb{N}\backslash\{1,2\}\right)^{\mathbb{N}}\right|=\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=א$$

דף נוסף לשאלה מספר___

3. (24 נק', 8 נק' לסעיף) פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ נקראת מחזורית אם קיים $1\le p\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(n)=f(n+p)$.

(א) **הוכיחו/הפריכו:** אם $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מחזורית אז f אינה על.
פתרון: הוכחה: תהא f מחזורית, אזי קיים $1\le p\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(n)=f(n+p)$. טענה: לכל k טבעי מתקיים כי $f(n)=f(n+kp)$. הוכחה: באינדקוציה על k. בסיס: עבור $k=1$ מתקיים לפי הגדרה. צעד: נניח נכונות עבור k ונוכיח עבור $k+1$. אכן

$$f(n+(k+1)\,p)=f(n+p+kp)=f(n+p)=f(n)$$

כנדרש.
מסקנה: $Im(f)=\{f(r)\mid 1\le r\le p\}$ ולכן f אינה על כי התמונה שלה בעלת p איברים שונים לכל היותר (זה נובע מכך שלכל $n>p$ טבעי, קיים k טבעי ו $1\le r\le p$ כך ש $n=kp+r$ ולכן $f(n)=f(r)$).

(ב) **הוכיחו/הפריכו:** לכל $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מתקיים כי: אם f^2 מחזורית אז f מחזורית. [הערה: $f^2=f\circ f$].
פתרון: הפרכה: נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ע"י

$$f(n)=\begin{cases}1 & n>2\\ 2 & n=1,2\end{cases}$$

ואז f אינה מחזורית כי לכל p טבעי מתקיים $f(2)\neq f(2+p)$ ובנוסף $f^2(n)=2$ ולכן היא מחזורית עם $p=1$ (כלומר לכל n טבעי מתקיים כי $f^2(n)=f^2(n+1)=2$).

(ג) נגדיר $A\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ קבוצת כל הפונקציות המחזוריות. קבעו האם עוצמת הקבוצה A היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת. הוכיחו את קביעתכם.
פתרון: נראה כי $|A|=\aleph_0$. מצד אחד $\{f\equiv n\mid n\in\mathbb{N}\}$ קבוצת הפונקציות הקבועות מוכלת ב A ועוצמתה $\aleph_0$ ולכן $\aleph_0\le|A|$.
מצד שני: נגדיר לכל p טבעי את הקבוצה

$$A_p=\{f\in A\mid\forall n\in\mathbb{N}:\ f(n)=f(n+p)\}$$

ונקבל כי $A=\cup_{p\in\mathbb{N}}A_p$. נראה לכל p טבעי, A_p בת מנייה ונקבל כי A איחוד בן מניה של בנות מניה ולכן $|A|\le\aleph_0$. אכן, יהא p טבעי נתון. ונגדיר $F:\mathbb{N}^p\to A_p$ ע"י

$$F\left((a_1,\ldots,a_p)\right)=f$$

כאשר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f(i)=a_i$ לכל $1\le i\le p$ ובצורה רקורסיבית עבור n טבעי , נגדיר $f(n+p)=f(n)$. (כלומר נקבע את p הערכים $f(1),\ldots,f(p)$ להיות הערכים $a_1,\ldots,a_p$ ונגדיר את שאר ערכי הפונקציה כך שהיא תהיה מחזורית).
נראה כי F חח"ע ועל ואז $|A_p|=|\mathbb{N}^p|=\aleph_0$.
F חח"ע: נניח $F\left((a_1,\ldots,a_p)\right)=F\left((b_1,\ldots,b_p)\right)=g$ אזי בפרט לכל $1\le i\le p$ מתקיים כי $a_i=f(i)=g(i)=b_i$ ולכן $(a_1,\ldots,a_p)=(b_1,\ldots,b_p)$.
F על: תהא $f\in A_p$. נגדיר $a_i=f(i)$ לכל $1\le i\le p$ ואז $F\left((a_1,\ldots,a_p)\right)=f$.

דף נוסף לשאלה מספר___

4. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהא A קבוצה ויהא R יחס על A המתקיים:

$$\forall a,b,c \in A: \ (aRb \wedge bRc) \rightarrow cRa.$$

(א) תנו דוגמה ליחס R כזה שאינו יחס שקילות.
פתרון: למשל $A=\{1\}$ ו $R=\emptyset$ מקיים את התנאי $\forall a,b,c \in A: \ (aRb \wedge bRc) \rightarrow cRa$ באופן ריק והוא אינו רפלקסיבי ולכן לא יחס שקילות.

(ב) הוכיחו שאם R <u>גם</u> רפלקסיבי אז הוא יחס שקילות.
פתרון: רפלקסיביות מתקיימת.
סימטריות: נניח aRb, כיוון ש R רפלקסיבי גם aRa נקבל כי bRa (כיוון ש $(aRa \wedge aRb) \rightarrow bRa$) .
טרנזיטיביות: נניח $aRb \wedge bRc$ אזי לפי נתוני השאלה cRa וכיוון שהוכחנו סימטריות זה גורר aRc כנדרש.

(ג) **הוכיחו/הפריכו:** אם R <u>גם</u> טרנזיטיבי אז R סימטרי.
פתרון: הפרכה: למשל $A=\{1,2\}$ ו $R=\{(1,2)\}$ אינו סימטרי אבל הוא גם טרנזיטיבי וגם עונה על תנאי השאלה באופן ריק.

(ד) הוכיחו שאם R <u>גם</u> יחס סדר אז $R=I_A$ (כאשר I_A הוא יחס הזהות על A).
פתרון: אם R יחס סדר אז בפרט הוא רפלקסיבי ולכן לפי סעיף ב הוא יחס שקילות. כלומר R הוא יחס שקילות וגם יחס סדר ולכן $R=I_A$ (לא יכול להיות aRb עבור $a \neq b$ כי לפי סימטריות (הוא יחס שקילות) גם bRa שזה סותר את את הגדרת אנטי סימטריות (כי הוא יחס סדר).

דף נוסף לשאלה מספר___

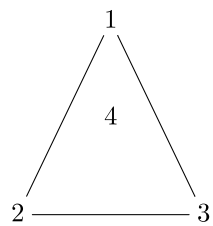
דף נוסף לשאלה מספר___

5. (21 נק').

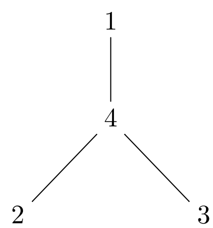
(א) יהא $G=(V,E)$ גרף. נגדיר את הגרף המשלים להיות $\overline{G}=\left(V,\overline{E}\right)$ כאשר $\overline{E}$ מוגדרת ע"י: יש קשת בין שני קודקודים ב $\overline{G}$ אמ"מ אין בניהם קשת ב G (כלומר לכל קשת e מתקיים: $e\in\overline{E}\iff e\notin E$).

i. (3 נק') מצאו דוגמה ל G כך שב $\overline{G}$ אין מסלול אוילר.

פתרון: למשל G המתואר ע"י



מקיים כי הגרף המשלים מתואר ע"י



שאין בו מסלול אוליר כי כל 4הקודקודים מדרגה אי־זוגית.

ii. (8 נק') הוכיחו כי אם G עם בדיוק שני קודקודים מדרגה זוגית ובנוסף $\overline{G}$ קשיר אז ב $\overline{G}$ יש מסלול אוילר.

פתרון: נסמן ב A את הקודקודים ב V שדרגם אי זוגית ב G (והנתון אומר שיש שתי קודקודים בדיוק מדרגה זוגית מתפרש כ $|V\backslash A|=2$) ממשפט לחיצת הידיים מתקיים כי

$$2\left|E\right|=\sum_{v\in V}\deg_{G}(v)=\sum_{v\in A}\deg_{G}(v)+\sum_{v\in V\backslash A}\deg_{G}(v)$$

ומכיוון ש $\sum_{v\in V\backslash A}\deg_{G}(v)$ זוגי (סכום של שני מספרים זוגיים) נקבל כי $\sum_{v\in A}\deg_{G}(v)$ זוגי גם כן ולכן $|A|$זוגי (כי אחרת סוכמים מספר אי זוגי של מספרים אי זוגיים ששוה למספר אי זוגי). ולכן $|V|=|A|+2$ גם זוגי ונוכל לסמן $|V|=2n$ עבור n טבעי. נשים לב שמתקיים לכל $v\in V$ כי $\deg_{\overline{G}}(v)=(|V|-1)-\deg_{G}(v)=(2n-1)-\deg_{G}(v)$ (בגרף המשלים v מחובר לכל הקודוקים שבגרף G הוא לא מחובר אליהם) ולכן אם $\deg_{G}(v)$ זוגי אזי $\deg_{\overline{G}}(v)$ אי זוגי ואם $\deg_{G}(v)$ אי זוגי אזי $\deg_{\overline{G}}(v)$ זוגי. לכן נקבל כי ב $\overline{G}$ יש שני קודקודים בדיוק מדרגה אי זוגית. כיוון שנתון שהוא קשיר יש בו מסלול אוילר.

(ב) (10 נק') נגדיר $a_{0}=1,a_{1}=2$ ולכל n טבעי, נגדיר $a_{n+1}=2a_{n}-a_{n-1}$. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים כי $a_{n}=n+1$.

פתרון: נוכיח באינדוקציה שלמה כי לכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים $a_{n}=n+1$ (ואז בפרט זה נכון לכל n טבעי).

בסיס "מורחב" (שני מקרי התחלה. זה יעזור לנו בשלב הבא): $n=0,n=1$, לפי הגדרה מתקיים כי $a_{0}=1=0+1,\ a_{1}=2=1+1$.

צעד: כעת נניח נכונות עד $n\geq1$ כולל ונוכיח עבור $n+1$ (שימו לב כי ניתן להניח נכונות עד $n\geq1$ ולא רק עד $n\geq0$ כי בדקנו שני מקרי התחלה בבסיס): אכן, לפי הגדרה,

$$a_{n+1}=2a_{n}-a_{n-1}=2\left(n+1\right)-\left(n-1+1\right)=2n+2-n=n+2=\left(n+1\right)+1$$

כאשר השיוויון השני נובע מהנחת האינדוקציה.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___