Exercise

נגדיר $A = \{X \subseteq \mathbb{R} : |X| = \aleph_0\}$, מה עוצמתה?

$|A| \ge \aleph$ כי ראינו קודם שאוסף הת"ק האינסופיות של $\mathbb{N}$ מעוצמה $\aleph$ ואוסף זה מוכל בקבוצה A

כדי להוכיח $|A| \le \aleph$ נגדיר: $F: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to P(\mathbb{R})$ (לוקחת $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ שולחת לת"ק של $\mathbb{R}$)

$$F(f) = Im(f)$$

<u>טענה:</u> $A \subseteq Im(F)$. תהי $X \in A$ מהגדרה X מעוצמת הטבעיים ← קיימת פונ' $f:\mathbb{N}\to X$ חח"ע ועל $F(f)=Im(f)=X$ כלומר $X \in Im(F)$

כי f על $F' : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to Im(F) \to F'=F$: $\exists F'$ על

$$|A| \le |Im(F)| \le |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph \to \aleph \le |A| \le \aleph$$

exercise

Define $A = \{X \subseteq \mathbb{R} : |X| = \aleph\}$, מה עוצמתה?

$A \subseteq P(\mathbb{R})$ כלומר $|A| \le 2^{\aleph}$

נראה $2^{\aleph} \le |A|$ ניקח קטע פתוח $(0,1)$. נסתכל על קבוצת החזקה שלו

$f: P((0,1)) \to A$

איך נבנה f חח"ע?

$$B \mapsto B \cup (3,4)$$

נשים לב $B\cup(3,4) \in A$

$$|B\cup(3,4)| = |B| + |(3,4)| = \aleph$$

f חח"ע $f(B_1)=f(B_2)$ $B_1\cup(3,4) = B_2\cup(3,4) \to B_1 = B_2$ (כי B_1, B_2 זרות ל-$(3,4)$)

$$|P((0,1))| = 2^{\aleph} \le |A|$$

לפי קש"ב $|A| = 2^{\aleph}$

תרגיל ממבחן תשסח מועד א (ד"ר שי סרוסי וד"ר אלי בגנו)

תהי A קבוצה אינסופית. נסמן

$a=|A|,\ B=P(A),\ F=A\times P(A),\ C=P(A)^A,\ H=B^B$

א. מצא את $|C|$

ב. מצא את $|F\times H|$

ג. מצא את $|\{R : |\mathbb{N}/R|=2\}|$ המוכלת באוסף יחסי השקילות על הטבעיים.

א) $|C|=|P(A)^A|=(2^a)^a=2^{aa}=2^a$

ב) $|F\times H|=|[A\times P(A)]\times B^B|$

$|H|=|B^B|=(2^a)^{2^a}=2^{a\cdot 2^a}=2^{2^a}$ $\quad |B|=2^a \quad B=P(A)$

$|F|=|A\times P(A)|=a\cdot 2^a=2^a$

$|F\times H|=|F|\cdot|H|=2^a\cdot 2^{2^a}=\boxed{2^{2^a}}$

ג) הקבוצה הנל היא כל יחסי השקילות על הטבעיים שיש להם 2 מחלקות שקילות

(לדוג' - זוגיים ואיזוגי)

הוכחנו בעבר שכל יח"ש ניתן להתאים לחלוקה. במקרה שלנו לחלוקה של $\mathbb{N}$ של

שתי קבוצות זרות $W=\{\{A,A^c\}\mid A\subseteq\mathbb{N}\}$

נשים לב $\bigcup_{\{A,A^c\}\in W}\{A,A^c\}=P(\mathbb{N})$

הראנו קודם שבהינתן $\{A_i\}_{i\in I}$ זרות $\quad \left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|=\sum_{i\in I}a$

$2^{\aleph_0}=|P(\mathbb{N})|=|W|$

תרגיל ממבחן תשע מועד א (ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן)

יהי S יחס על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (קבוצת כל הפונקציות הממשיות), המוגדר על ידי $(f,g)\in S$ אם"ם לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$

1. הוכיחו ש S הינו יחס שקילות
2. תהי $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מצאו את $|[f]|$
3. מצאו את $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S|$

פתרון:

א) 1. רפלקסיביות: עבור $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\forall x\in\mathbb{R}\ \underbrace{f(x)-f(x)=0}_{\in\mathbb{Z}} \longleftarrow (f,f)\in S$

2. סימטריות: אם $(f,g)\in S$ $\forall x:\ f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$ כיוון שיש נגדי לחיבור

בשלמים: $g(x)-f(x)\in\mathbb{Z}$ (הנגדי של $f(x)-g(x)$)

3. טרנזיטיביות: $S\ni(f,g),(g,h)$ $\quad f-g\in\mathbb{Z}\ \ g-h\in\mathbb{Z}$

בגלל סגירות לחיבור, גם $\mathbb{Z}\ni f-h$ $\quad \underbrace{f-g}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{g-h}_{\in\mathbb{Z}}=f-h$

$(f,h)\in S$

ב) $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\quad |[f]|=?$

$[f]\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S$ $\quad F:[f]\to\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ $\quad f,g\in[f]$

נגדיר כך: $g\in[f]$ $\quad \forall x:\ (f-g)(x)\in\mathbb{Z}$

$F(g)=f-g$

חח"ע: יהיו $g,h\in[f]$. $F(g)=F(h)$

$\forall x\in\mathbb{R}\ \ \cancel{f(x)}-g(x)=\cancel{f(x)}-h(x)$

$\downarrow$

$\forall x:\ g(x)=h(x)\longrightarrow$ F חח"ע.

על: תהא p פונקציה $p\in\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ נמצא $f-p$ מקור תחת F

$F(f-p)=f-(f-p)=p$

$|[f]|=|\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}|=\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$

(ג) נמצא את עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S|$

נגדיר פונקציה $F:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\longmapsto[0,1)^{\mathbb{R}}$ $\lfloor 4.9\rfloor=4$ $\lfloor x\rfloor$ הערך התחתון השלם של x

$$F(f)=f-\lfloor f\rfloor$$

נראה שהפונק' הנ"ל מוגדרת היטב מה"ע על כשמפעילים על קבוצת המנה:

מוגדרות: נקח שתי פונק' מאותה מחלקת שקילות ונראה שהתמונה זהה:

$g,f\in[f]$ $$F(g)-F(f)=\underbrace{g-\lfloor g\rfloor}_{<1}\underbrace{-f+\lfloor f\rfloor}_{<1}$$

חיסור של שני מספרים שקטנים מאחד או שלילים:

בגלל שההפרש בין f,g הוא שלם הוא שווה לאפס כלומר

$$F(g)-F(f)=0\longrightarrow F(g)=F(f)$$

הראנו ששתי פונקציות שקולות תחת היחס S מגיעות לאותו מקום ע"י F

$$F:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S\longmapsto[0,1)^{\mathbb{R}}$$

חח"ע נניח $F(f)=F(g)$ $f-\lfloor f\rfloor=g-\lfloor g\rfloor\longleftarrow f-g=\underbrace{\lfloor f\rfloor-\lfloor g\rfloor}_{\in\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}}$

$$[f]=[g]\longleftarrow(f,g)\in S\longleftarrow f-g\in\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$$

f,g הן שקולות

על: $r:\mathbb{R}\to[0,1)$ $F(r)=r-\lfloor r\rfloor=r-0=r$

כלומר כל פונקציה מהממשיים לקטע החצי פתוח $[0,1)$ נשלחת לעצמה

תחת F.

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S|=|[0,1)^{\mathbb{R}}|=\aleph^{\aleph}=2^{\aleph}$$

תרגיל ממבחן תשע מועד ב (ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן)

א. תהי A קבוצה אינסופית מעוצמה a.

1. נגדיר עבור :

$$X = \{(X_1, \dots, X_n) : 1 < n \in \mathbb{N} \wedge \left[\bigcup_i X_i = A\right] \wedge \left[\forall i \neq j : X_i \cap X_j = \emptyset\right] \wedge \left[\forall i X_i \neq \emptyset\right]\}.$$

כלומר אוסף החלקות הסופיות הלא טרי' הסדורות של A **הוכח** $|X| = 2^a$

2. מצא את $|\mathbb{N} \cup X|, |\mathbb{N} \times X|$ וגם את $|\mathbb{N}|^{|X|}, |X|^{|\mathbb{N}|}$

ב.תהי $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות הזרות זו לזו. נסמן את עוצמת כל אחת מהן ב a_i בהתאמה.
נגדיר $\sum_{i\in I} a_i = |\bigcup_{i\in I} A_i|$.
חשב את $\sum_{n\in\mathbb{N}} \aleph$

נגדיר פונקציה: $g: X \to P(A)^{\aleph_0}$

$$g((X_1, \dots X_n))(\underset{i\in\mathbb{N}}{i}) = \begin{cases} X_i & 1 \le i \le n \\ \emptyset & \text{if } n < i \end{cases}$$

אפשר להוכיח שזה חח"ע

$$|X| \le (2^a)^{\aleph_0} = 2^{a\cdot\aleph_0}$$

$$a\cdot\aleph_0 = \max\{a, \aleph_0\} = a$$

a אינסופי

$$|X| \le 2^a$$

די למצוא פונק' חח"ע $P(A) \to X$ נשלח כל תת' לזוג הסדור שמכיל את התת' ואת המשלים שלה. (את $\emptyset$ ואת A נשלח לחלוקה מגודל $n>2$ כלשהי)

$$2^{|A|} \le |X| \le 2^a \longrightarrow |X| = 2^a$$

$A=\mathbb{N}$. חשבו את העוצמות הבאות: ($\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או סופיות)

$2 \le |A| \le |B| \to |A|^{|B|} = 2^{|B|}$

$|A^A| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

$|P(A)^A| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

$|P(A)^{P(A)}| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph}$

$|A \times P(A) \times P(A)^{P(A)}| = \aleph_0 \cdot \aleph \cdot 2^{\aleph} = 2^{\aleph}$

קבעו והוכיחו עבור על אחת מהקבוצות הבאות אם עוצמתה $\aleph_0$, א, $2^{\aleph}$ סופית או אחרת.

(א) $A = P(P(\mathbb{N}))$ $\qquad |A| = 2^{\aleph}$

(ב) הקבוצה B המוגדרת כקבוצת כל הפונקציות החח"ע מ $P(\mathbb{N})$ ל $\mathbb{N}$.

(ג) הקבוצה C המוגדרת כקבוצת כל הפונקציות העל מ $\mathbb{N}$ ל $\{1,2\}$.

(ד) $D = \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid a^2+b^2=1\}$ (מעגל היחידה).

(ב) $B=\emptyset$ אין פונקציה חח"ע מ $P(\mathbb{N}) \leftarrow \mathbb{N}$ $\qquad |B|=0$

(ג) $\{1,2\}^{\mathbb{N}} = \overbrace{\{\text{פונקציה על } \{1,2\}^{\mathbb{N}}\}}^{A} \cup \overbrace{\{\text{פונק' לא על } \{1,2\}^{\mathbb{N}}\}}^{B}$

נשים לב שיש בדיוק 2 פונק' ב-B $\qquad B=\{f_1, f_2\}$

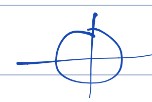
$\aleph = 2^{\aleph_0} = |\{1,2\}^{\mathbb{N}}| = |A|+2$

$\aleph = \max\{|A|, 2\} \longrightarrow |A| = \aleph$

(ד) נשים לב שניתן להתאים את D לקטע הסגור $[-1,1]$

f חח"ע $\qquad f: [-1,1] \longrightarrow D$

$a \in [-1,1] \qquad f(a) = (a, \sqrt{1-a^2})$



$|D| \geq |[-1,1]|$

$|D| \geq \aleph$

g חח"ע $\qquad D\ g: (a,b) \mapsto (a,b) \in [-1,1]\times[-1,1]$

$|D| \leq \aleph \cdot \aleph = \aleph$

לפי קש"ב $\qquad |D| = \aleph$

א. תנו דוגמה לקבוצה $A\subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in A$ מתקיים כי $X\cap Y=\phi$.

ב. תהי $A\subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in A$ מתקיים כי $X\cap Y=\phi$, הוכיחו כי A בת מנייה.

ג. תהי $B\subseteq\mathbb{N}$ ותהי $C\subseteq P(\mathbb{N})$ קבוצה כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in C$ מתקיים $X\cap Y=B$. הוכיחו כי C בת מנייה.

ד. תהי $D\subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in D$ מתקיים כי $|X\cap Y|\le 10$. הוכיחו ש D בת מניה.

<u>רמז</u>: הביטו ב $\bigcup_{B\in I} D_B$, כאשר $D_B=\{X\in D\mid B\subseteq X\}$, $I=\{X\in P(\mathbb{N}):|X|=10\}$.

(א) $A=\{\{n\}\mid n\in\mathbb{N}\}$ $\quad A=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

(ב) מספיק להראות פונקציה חח"ע $f:A\to\mathbb{N}\cup\{0\}=$ קבוצה בעוצמה $\aleph_0$

נסמן עבור $X\in A$

$n_x=\min(X)$

A קבוצה של תת"ק בזוגיים. זרות

$f(X)=n_x$

$f(\phi)=0$

נראה f חח"ע. $X,Y\in A$

$f(X)=f(Y)\to n_x=n_y$

$X\ni n_x=n_y\in Y$ כלומר $n_x\in X\cap Y$

בסתירה לכך $X\cap Y=\phi$ ⇐ $X=Y$

$|A|\le\aleph_0=|\mathbb{N}\cup\{0\}|$

(ג) $g:C\to P(\mathbb{N})$ $\quad g(X)=X\setminus B$

כל הקבוצות ב Img זרות זו לזו כי לפני הפעלת g החיתוך בניהן היה B שהסרנו. לפי סעיף (ב) Img בת מניה

כך: להוכיח, נצטרך להראות g חח"ע $\quad X,Y\in C$

$g(X)=g(Y)\to X\setminus B=Y\setminus B$

נקח $a\in X$ אם $a\in B$ ⇐ $a\in X\cap Y$ ⇐ $a\in Y$

אם $a\notin B$ ⇐ $a\in X\setminus B$ ⇐ $a\in Y$

אפשר לחלק למקרים ולהראות הכלה דו-כיוונית $X=Y$

דרך ב':

שימוש להגדיר

$n_x=\min\{X\setminus B\}$

$g: C \to \mathbb{N}\cup\{0\}$

$g(X)=n_x$

$g(\emptyset)=0$

לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו האם עוצמתה היא $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}, 2^{2^{\aleph}}$. נמקו.

א. A היא קבוצת כל הישרים במישור בעלי שיפוע חיובי.

ב. A היא קבוצת כל הישרים במישור בעלי שיפוע חיובי העוברים דרך הראשית.

ג. $A=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R}: -1\le f(x)\le 5\}$.

ד. $A=\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)}$.

פתרון:

א) יבוא שיפוע + נק' חיתוך עם ציר הy מגדירים ישר באופן יחיד

$f: \underbrace{\mathbb{R}^+}_{\text{שיפוע}}\times\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{נק' חיתוך}} \longrightarrow A$

f חח"ע ועל

$|A|=|\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}|=\aleph\cdot\aleph=\aleph$

ב) כבר יבוא נק' החיתוך לכן נוכל להתאים רק את השיפוע

$f:\mathbb{R}^+\longrightarrow A$

$|A|=\aleph$

$\mathbb{R}^+\times\{0\}\to A$

ג) $A=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R}\ -1\le f(x)\le 5\}$ נשים לב שזו בדיוק הקבוצה $[-1,5]^{\mathbb{R}}$

$|[-1,5]^{\mathbb{R}}|=|[-1,5]|^{|\mathbb{R}|}=\aleph^{\aleph}=(2^{\aleph_0})^{\aleph}=2^{\aleph_0\cdot\aleph}=2^{\aleph}$

ד) $A=(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})}$

$|A|=(\aleph_0^{\aleph_0})^{\aleph_0}\cdot(\aleph_0^{\aleph_0^{\aleph_0}})=\aleph^{\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\aleph}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph}$

$=\underbrace{2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}}_{\aleph}\cdot 2^{\aleph}=\aleph\cdot 2^{\aleph}=2^{\aleph}$

שאלה (2006A):

(א) מהו מס' מחלקות השקילות ב-$\mathbb{Z}$ עם יחס השקילות $a\sim b \Leftrightarrow a\equiv b \mod 3$?

(ב) יהיו $\mathbb{Z}\ni a_1,a_2,a_3,a_4$. הוכח כי קיימים $i\neq j$ כך ש-3 מחלק את a_i-a_j בלי שארית.

(א) נשים לב שניתן לחלק $\left|\mathbb{Z}/_\sim\right| = \left|\{[0],[1],[2]\}\right| = 3$

את השלמים למס' שמתחלקים ב-3, מס' עם שארית 1 ומס' עם שארית 2 כשמחלקים אותם בשלוש

(ב) אזי $a_i, a_j \in$ אותה מחלקת שקילות סיימנו.

נניח בשלילה $\forall i\neq j$ a_i-a_j לא מתחלק ב-3

זה אומר שקיימות 4 מחלקות שקילות (4 שאריות שונות כשמחלקים ב-3)

בסתירה למס' מחלקות השקילות שמצאנו בא'.

שאלה 3 (2005B)

א) $f,g:A\to\mathbb{R}$ פונקציות, $h:A\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $\forall a\in A: h(a)=f(a)+g(a)$

הוכיחו/הפריכו: f,g פונקציות על $\leftarrow$ h על.

ב) $f:A\to\mathbb{N}$ פונקציה $f':P(A)\setminus\{\emptyset\}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f'(B)=\min\{f(b)|b\in B\}$: $B\in P(A)\setminus\emptyset$

הוכיחו/הפריכו: f חח"ע $\leftarrow$ f' חח"ע.

פתרון:

א) נפריך. נגדיר $f:A\to\mathbb{R}$ על $\forall a\in A: g(a)=-f(a)$

g היא על כי f על.

$h=f+g$ $\quad \forall a\in A: h(a)=f(a)+g(a)=f(a)-f(a)=0$

ב) הפרכה.

$A=\{1,2\}$ $\quad f(1)=1$ $\quad f(2)=2$ $\quad$ f חח"ע

$f'(\{1\})=\min\{f(b)|b\in\{1\}\}=1$

$f'(\{1,2\})=\min\{1,2\}=1$

ראינו: $B_1\neq B_2\in P(A)\setminus\emptyset$ אך: $f'(B_1)=f'(B_2)$ כלומר f' לא חח"ע

מועד ב 2017

שאלה 2

סעיף א (12 נקודות)

נגדיר יחס R על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ על ידי $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow(a\le c)\wedge(b=d)$.

i. הוכיחו כי R יחס סדר חלקי.
ii. מצאו את כל האיברים המינימליים לפי R.
iii. האם יש איבר קטן ביותר? נמקו.
iv. האם R יחס סדר מלא? נמקו.

סעיף ב (8 נקודות)

נגדיר יחס S על $P(\mathbb{N})$ על ידי $XSY\Leftrightarrow X\subseteq Y\vee Y\subseteq X$,
<u>הוכיחו/הפריכו</u>: S יחס שקילות.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

$(1,2)\le(3,2)\le(4,2)\le(5,2)$

א) i רפלקסיבי טרנזיטיבי אנטי סימטרי

ii) נשים לב שכל איבר מהצורה $(1,n)$ $n\in\mathbb{N}$ הוא מינימלי

$(1,n)\le(2,n)\le(3,n)\le(4,n)\dots$

iii) לא קיים איבר קטן ביותר כי אין איבר שמתיחס לכולם בR.
וגם יש כמה מינימלים.

iv) לא מלא $(1,n_1)\not\le(1,n_2)$ $n_1\ne n_2$

ב) S לא טרנזיטיבי: $A=\{1\}$ $B=\{2\}$ $C=\{1,2\}$

ASC, CSB $A\not S B$

$\{1\}\subseteq\{1,2\}$ $\{2\}\subseteq\{1,2\}$ $\{1\}\not\subseteq\{2\}\wedge\{2\}\not\subseteq\{1\}$

א. תנו דוגמה לקבוצה $A\subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in A$ מתקיים כי $X\cap Y=\phi$.
ב. תהי $A\subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in A$ מתקיים כי $X\cap Y=\phi$, הוכיחו כי A בת מנייה.
ג. תהי $B\subseteq\mathbb{N}$ ותהי $C\subseteq P(\mathbb{N})$ קבוצה כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in C$ מתקיים $X\cap Y=B$. הוכיחו כי C בת מנייה.
ד. תהי $D\subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in D$ מתקיים כי $|X\cap Y|\leq 10$. הוכיחו ש D בת מניה.
רמז: הביטו ב $\bigcup_{B\in I} D_B$, כאשר $D_B=\{X\in D \mid B\subseteq X\}$, $I=\{X\in P(\mathbb{N}):|X|=10\}$.

לפני שנפתור נבין מהו $\bigcup_{B\in I} D_B$

$B\in I$ $|B|=10$.

$D_B=\{X\in D \mid B\subseteq X\}$

$X\neq Y\in D_B$ $\qquad \underbrace{B\subseteq X\cap Y}_{\text{עפ״י הגדרת } D_B}$ $\qquad \underbrace{|X\cap Y|\leq 10}_{\text{עפ״י הגדרת } D}$

$$10=|B|\leq|X\cap Y|\leq 10 \to |X\cap Y|=10 \to X\cap Y=B$$

כאשר D_B היא כל תת״ק של N כך ש $X\cap Y=B$.

עפ״י סעיף ג D_B בת מניה.

$$D=\left(\bigcup_{B\in I} D_B\right)\cup E$$

$$E=\{X\in D : |X|\leq 9\}$$

הראנו בתרגול קודם שאוסף תת״ק הסופיות של הטבעיים הוא בן מניה

נוכל לעשות את הגדרת D_B עבור $B\in J=\left\{\begin{matrix}X\in P(\mathbb{N})\\ |X|=9\end{matrix}\right\}$

בעצם נגיע לאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה $\leftarrow$ D בת מניה.