תזכורת: נוסחת קושי:

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)}\mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}\left(z_0\right)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

תרגיל

$$\int_{|z-1|=3}\frac{\cos t}{\left(z-i\right)^3}\mathrm{d}z$$

פתרון

$f\left(z\right)=\cos z$ היא פונקציה אנליטית ב$\mathbb{C}$.

$$f''\left(z_0\right)=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi i}\int_{|z-1|=3}\frac{f\left(z\right)}{\left(z-i\right)^3}\mathrm{d}z$$

$$I=\pi i\cdot f''\left(z_0\right)=-\pi i\cdot\cos i=$$

$$=-\pi i\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}=\boxed{-\frac{\pi}{2}i\left(e+\frac{1}{e}\right)}$$

תרגיל

חשבו

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$$

כאשר:

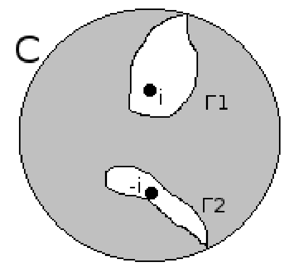
1. $C_1=\left\{z\middle||z-i|=\frac{1}{2}\right\}$
2. $C_2=\left\{z||z|=2\right\}$

פתרון

1. $\frac{1}{(i+z)(z-i)} = \frac{1}{1+z^2}$ אנליטית בפנים של C_1.

$$f(i) = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int \frac{f(z)}{z-i}\,\mathrm{d}z}_{I} \Rightarrow I = 2\pi i \cdot f(i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \boxed{\pi}$$

2. $\partial D = C - \Gamma_1 - \Gamma_2$, כאשר Γ_1, Γ_2 הם תת תחומים שמחוברים לשפה של C בנקודה אחת, וכוללים את הנקודות הבעייתיות $\pm i$. לכן בתחום $C - \Gamma_1 - \Gamma_2$ הפונקציה אנליטית. Γ_1, Γ_2 בסימן מינוס, כי מסתכלים על החוץ, ואז נגד כיוון השעון הופך להיות כיוון שלילי. חשוב לבנות אותם כך שיהיו זרים אחד לשני, ולא יחתכו את C.



$$\int_{\partial D} = \int_C - \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2}$$

לפי משפט קושי־גודסא

$$I = \int_C = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}$$

$$\int_C \frac{\mathrm{d}t}{1+z^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$$

$\int_{\Gamma_2} = \pi$ לפי סעיף 1. נבחר $g(z) = \frac{1}{z-i}$, ואז:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\mathrm{d}}{1+z^2} = \int_{\Gamma_2} \frac{g(z)}{z+i}\mathrm{d}z$$

$$g(-i) \cdot 2\pi i = \int \frac{g(z)}{z+i}\mathrm{d}z = \frac{1}{-\cancel{2i}} \cdot \cancel{2}\pi\cancel{i} = -\pi$$

קיבלנו

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \pi \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = -\pi$$

ולכן

$$\boxed{\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \pi - \pi = 0}$$

תרגיל

$$|z_0| \neq 1 \qquad I = \int \frac{z+\overline{z}}{\left(z-z_0\right)^2}\mathrm{d}z$$

פתרון

$$I = \int_{|z|=1} \frac{z\left(z+\overline{z}\right)}{z\left(z-z_0\right)^2}\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{z^2+|z|^2}{z\left(z-z_0\right)^2}\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z\left(z-z_0\right)^2}\mathrm{d}z$$

נחלק ל2 מקרים:

1. $|z_0| > 1$. במקרה הזה נקבל $\int \frac{\frac{z^2+1}{\left(z-z_0\right)^2}}{z}\mathrm{d}z$, כאשר $\frac{z^2+1}{\left(z-z_0\right)^2}$ אנליטית.

2. $0 < |z_0| < 1$. $\frac{1}{z_0^2} = \frac{2\pi i}{z_0^2}$. במקרה הזה נקבע $f(z) = \frac{z^2+1}{\left(z-z_0\right)^2}$ ואז $I_1 =$
$2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{z_0^2} = \frac{2\pi i}{z_0^2}$

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z\left(z-z_0\right)}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} \frac{g(z)}{\left(z-z_0\right)^2}\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} \frac{h(z)}{z}\mathrm{d}z$$

$$g(z) = \frac{z^2+1}{z} \qquad h(z) = \frac{z^2+1}{\left(z-z_0\right)^2}$$

$$I_2 = 2\pi i g'(z_0) + 2\pi i h(0) = 2\pi i\left[1-\frac{1}{z_0^2}\right] + 2\pi i\frac{1}{z_0^2} = 2\pi i\left[1-\frac{1}{z_0^2}+\frac{1}{z_0^2}\right] = \boxed{2\pi i}$$

3. $|z_0| = 0$ - כלומר $z_0 = 0$.

$$I_3 = \int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2i}\cdot\left(z^2+1\right)''\Big|_{z=0} = \boxed{2\pi i}$$

שאלה

$$I = \int_{\Gamma} \frac{2z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

$$\Gamma = \{z \mid |z| = 2, \mathrm{Im}\,(z) \geq 0\}$$

1. האם קיימת פונקציה קדומה ל-$f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$?
2. חשב I.

פתרון

1. נשים לב ש-$f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$, $g(z) = z^2+1$. כלומר, נגזרת של ענף כלשהו של לוגריתם. לכן, אם קיימת פונקציה קדומה ל-f אז היא בהכרח ענף כלשהו של $\log\left(z^2+1\right)$. ואז $\log\left(z^2+1\right)$ <u>אינו אנליטי</u> כי אם תחום מקיף נק' $(0,0)$ אז אין בתחום זה ענף אנליטי של $\log \Leftarrow$ לא קיימת פוקנציה קדומה ל-$\frac{2z}{z^2+1}$.

זה לא נכון!

הטעות היא שהנחנו שמקבלים ענף של לוגריתם. אבל יכול להיות שמקבלים כמה ענפים. ניתן להגדיר תחום כך שלא נצטרך לתפור.

תזכורת - משפט קושי: אם f אנליטית בתחום פשוט קשר כלשהו אז ל-f יש פונקציה קדומה בתחום זה.

לכן ניתן לבחור

$$D_1 = \left\{z \middle| |z| > 1, \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

$$D_2 = \{z \mid |z| > 1\}, \arg(z) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

D פשוט קשר, מכיל את Γ. D לא מקיף את $(0,0)$, לכן $\frac{2z}{z^2+1}$ אנליטית בתחום D, ולכן, לפי משפט קושי, יש לה פונקציה קדומה.

2. נשלים את Γ לקונטור סגור Γ' ע"י הוספת קטע $[-2,2]$. נגדיר $g(z) = \frac{2z}{z^2+i}$ אנליטית בתוך ועל Γ' ולכן

$$\int_{\Gamma'} \frac{2z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma'} \frac{g(z)}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i g(i) = 2\pi i$$

$$\int_{\Gamma}\frac{2z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=\int_{\Gamma'}\frac{2z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z-\int_{-2}^{2}\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=$$
$$=2\pi i-\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{-2}^{2}=2\pi i-[\ln 5-\ln 5]=\boxed{2\pi i}$$

תרגיל

תהי f אנליטית בתחום $\left\{z\,\middle|\,\begin{array}{c}0\le \mathrm{Im}\,(z)\\ a\in\mathbb{R}\\ a>0\end{array}\right\}$ כך שמתקיים $\lim\limits_{z\to\infty}f\,(z)=0$.

צ"ל: אם אינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}f\,(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס אז $\int_{\Gamma}f\,(z)\,\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{\infty}f\,(x)\,\mathrm{d}x$ כאשר $\Gamma=\{z|\mathrm{Im}\,(z)=a\}$

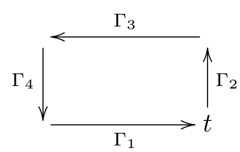
הערה: <u>רק בתרגיל הזה</u>, נגדיר $\int_{-\infty}^{\infty}f\,(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}f\,(x)\,\mathrm{d}x$

פתרון

$$\Gamma_t=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4$$

$$\int_{\Gamma_t}=\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}+\int_{\Gamma_3}+\int_{\Gamma_4}$$

כאשר



על Γ_1:

$$\int_{\Gamma_1}f\,(z)\,\mathrm{d}z=\int_{-t}^{t}f\,(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_1}f\,(z)=\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}f\,(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f\,(x)\,\mathrm{d}x$$

על Γ_2:

$$\left|\int_{\Gamma_2}f\,(z)\,\mathrm{d}z\right|\le a\cdot\max_{\Gamma_2}|f\,(z)|\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\left|\int_{\Gamma_2}f\,(z)\,\mathrm{d}z\right|=$$

$$=\lim_{t\to\infty}a\cdot\max|f\,(z)|=a\cdot 0=0\Rightarrow\int_{\Gamma_2}f\,(z)\,\mathrm{d}z=0$$

אותו חישוב על Γ_3 וΓ_4, רק בכיוון ההפוך:

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_3} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=-\int_{\Gamma_1} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

סה"כ, לפי קושי־גורסא נקבל

$$\int_{\Gamma_t} f\left(z\right)=0$$

ולכן

$$0=\int_{\Gamma_t}=\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}+\int_{\Gamma_3}+\int_{\Gamma_4}=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t\right)\,\mathrm{d}t-\int_{\Gamma} f\left(t\right)$$