- $$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

  M משטח k ממדי ב-$\mathbb{R}^n$, ω תבנית $(k-1)$.

- $k=2, n=2$

$$\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

משפט(גרין)

יהיו P ו-Q פונקציות גזירות ברציפות על קבוצה פתוחה $G \subset \mathbb{R}^2$. תהי $M \subset G$ קומפקטית(פשוט קשר או רב־קישרי). אזי

$$\iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial M} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

עם אוריינטציה מורשית על ∂M

דוגמה

$$M : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \qquad a>0$$

$$\gamma(t) = \left(a\cos^3 t, a\sin^3 t\right) \qquad t\in[0,2\pi]$$

($|M|$ - השטח של M)

$$|M| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(-a\sin^3 t\right)\left(-3a\cos^3 t\sin t\right) + \left(a\cos^3 t\right)\left(3a\sin^2 t\cos t\right)\right]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\left(\cos^2 t\right)\sin^4 t + \sin^2 t\cos^4 t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{8}\pi$$

משפט(גאוס)

יהיו P,Q,R פונקציות גזירות ברציפות על קבוצה פתוחה $G\subset\mathbb{R}^3$. תהי $M\subset G$ קבוצה קומפקטית(פשוט קשר או רב קישרי). אזי

$$\iiint_M\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{\partial M}P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

עם אוריינטציה מושרית על ∂M.

דוגמה

$$I=\int_S x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$S=\left\{x^2+y^2+z^2=a^2\right\}$$

$$M=B_a=\left\{x^2+y^2+z^2\leq a^2\right\}$$

$$2M=S$$

$$I=3\iiint\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\left(\sin\varphi\right)\rho^4\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=\frac{12}{5}\pi a^5$$

משפט(סטוקס)

יהי $M\subset\mathbb{R}^3$ משטח 2־ממדי. יהיו P,Q,R פונקציות גזירות ברציפות עם תומך קומפרטיבי בM. אזי

$$\int_M\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\int P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

עם אוריינטציה מושרית על ∂M.

דוגמה

$$P=x^2z+\sqrt{x^3+x^2+2}\qquad Q=xy\qquad R=xy+\sqrt{z^3+z^2+2}$$

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$$\Gamma=\left\{x^2+z^2=1,y=0\right\}$$

עם האוריינטציה נגד כיוון השעון, אם מסתכלים בכיוון החיובי של ציר הy

$$r\left(u,v\right)=\left(\overbrace{u\cos\left(2\pi-v\right)}^{\varphi},\overbrace{0}^{\psi},\overbrace{u\sin\left(2\pi-v\right)}^{\chi}\right)$$

$$r_u'\times r_v'=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\kappa}\\ \cos\left(2\pi-v\right) & 0 & \sin\left(2\pi-v\right)\\ u\sin\left(2\pi-v\right) & 0 & -u\cos\left(2\pi-v\right)\end{vmatrix}=\left(0,u,0\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=x^2-y$$

$$I=-\int_0^1\int_0^{2\pi}u^3\cos^2\left(2\pi-v\right)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}$$

מסקנה

אם $M=B\left(a,R\right)$, כזכור $\partial M=S\left(a,R\right)$, ונגדיר $F=\left(P,Q,R\right)$, אזי:

$$\mathrm{div}\ F\left(a\right)=\lim_{R\to 0}\frac{1}{V\left(B\left(a,R\right)\right)}\int_{S\left(a,R\right)}P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

משמעות בפיסיקה

- האינטגרל

$$\int_S P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

נקרא שטף של F דרך S.

- אם $\mathrm{div}\ F\left(a\right)=0$ אומרים שבa אין מקור.
- אם $\mathrm{div}\ F=0$ בכל התחום אומרים שהתחום חסר מקורות.
- האינטגרל $\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$ נקרא הסירקולציה של הזרימה.

תזכורת

ω תבנית־k על $G\subset\mathbb{R}^n$

- ω סגורה אם $\mathrm{d}\omega=0$
- ω מדוייקת אם קיימת תבנית η כך ש$\mathrm{d}\eta=\omega$.
- ω מדוייקת $\Leftarrow \mathrm{d}\omega=\mathrm{d}^2\eta=0 \Leftarrow$ ω סגורה.

דוגמה

$$\omega=-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\qquad(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

משפט

תהי ω תבנית־1 מדוייקת על קבוצה פתוחה $G\subset\mathbb{R}^n$. ז"א $\omega=\mathrm{d}f$ כאשר f פונקציה דיפרנציאבילית על G.
אם $\Gamma=\{\gamma:[a,b]\to G\}$[1] אזי

$$\int_\Gamma=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$$

הוכחה

$$\int_\Gamma\ \underset{\text{definition}}{\overset{\text{by}}{}}\ \int_a^b\sum_{i=1}^n\omega_i(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t\overset{\omega=\mathrm{d}t}{=}\int_a^b\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\overset{\substack{\text{chain}\\\text{rule}}}{=}\int_a^b f(\gamma(t))'\,\mathrm{d}t\overset{\substack{\text{Newton}\\\text{Leibniz}}}{=}f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$$

משפט

תהי ω תבנית־1 רציפה על קבוצה פתוחה $G\subset\mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. ω מדוייקת.
2. $\int_\Gamma\omega=0$ לכל עקום סגור $\Gamma\subset G$.
3. אם $\Gamma_1=\{\gamma_1:[a,b]\to G\}$ ו$\Gamma_2=\{\gamma_2:[c,d]\to G\}$ ו$\gamma_1(a)=\gamma_2(c)$, $\gamma_1(b)=\gamma_2(d)$, אזי

$$\int_{\Gamma_1}\omega=\int_{\Gamma_2}\omega$$

(בהקשר של פיסיקה ־ הפוטנציאל לא תלוי במסלול)

[1] כלומר Γ המסילה המוגדרת ע"י הפרמטריזציה γ, כאשר המקור הוא הקטע $[a,b]$.

הוכחה

$(2) \Rightarrow (1)$ $\gamma(a) = \gamma(b) \Leftarrow \int_\Gamma \omega = 0$ לפי משפט קודם.

$(3) \Rightarrow (2)$ $\int_{\Gamma_2} \omega - \int_{\Gamma_1} \omega = \int_{(\Gamma_2)^-} \omega + \int_{\Gamma_1} \omega = 0$

$(1) \Rightarrow (3)$ יהי $x_0 \in$. נגדיר $\int_{\Gamma(x_0,x)} = f(x)$(כאשר $\Gamma(x_0, x)$ עקום כלשהו מx_0 לx).

צריך להוכיח $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} = \omega_i}$ ואז נקבל $\mathrm{d}f = \omega$.

נבחר $t \in \mathbb{R}^n$ כך ש$[x, x + te_i] \in G$. נשתמש בt כדי לחשב נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{[x, x + te_i]}{t} = \ldots$$

הצגה פרמטרית של הקטע $[x, x + te_i]$ היא $\gamma(s) = x + se_i$ כאשר $s \in [0, t]$.

$$\cdots = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \omega(\gamma(s))\, \gamma'(s)\ \mathrm{d}s \overset{\gamma' = e_i}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int \omega_i(x + se_i)\ \mathrm{d}s = \omega_i(x)$$