

הערה מהתרגול הקודם

אם $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ אי-פריק מדרגה t , וגם a שורש של $f(x)$, אזי $a, a^p, a^{p^2}, a^{p^3}, \dots, a^{p^{t-1}}$ הם כל שורשי $f(x)$.

דוגמה

$$f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 1$$

נתון פולינום אי-פריק ב- $\mathbb{Q}[x]$. $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}) = S_3 \vee \mathbb{Z}_3$. אם יש שורש מרוכב אזי S_3 . בעזרת אינפי ניתן להוכיח שקיים שורש מרוכב.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 3 = 0$$

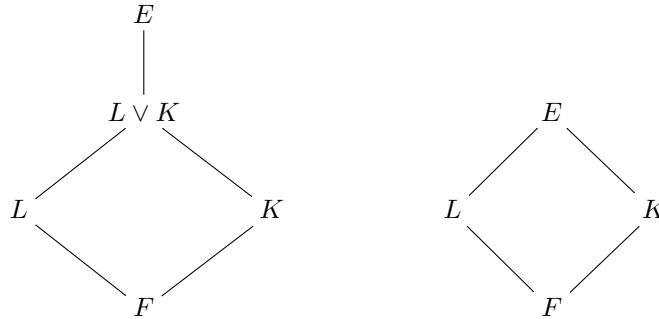
הדיסקרימיננטה היא $\Delta = -32 < 0$

א. לפולינום מדרגה אי-זוגית יש שורש ממשי(משפט ערך הביניים).

ב. לפי משפט רול - לפולינום שלנגזרתו אין שורשים ממשיים יש לכל היותר שורש אחד.

לפי א' וב' יש שורש ממשי יחיד, לכן בהכרח יש שני שורשים מרוכבים ולכן $\text{Gal} = S_3$.

תרגיל

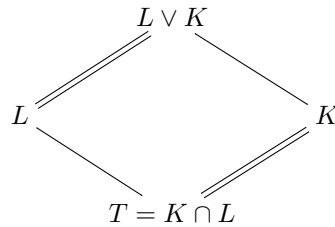


אם $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$ קובע את L, K אזי σ קובע את $L \vee K$.

פתרון

אם σ לא קובע את $L \vee K$ אזי $L \vee V \subseteq L \vee K \subseteq B = E^{(\sigma)} \cap (L \vee K) \subseteq L \vee K$ וגם $B \geq L$ וגם $B \geq K$ כי σ קובע, ולכן $B \geq L \vee K$ - וזו סתירה.

תרגיל



$\varphi : \text{Gal}(L \vee K/L) \rightarrow \text{Gal}(K/T)$ גלויים, וגם קיים $L \vee K/L$ היא הרחבת גלואה, אזי K/T הרחבת גלואה. איזומורפיזם $\text{Gal}(K/T)$.

פתרון

K שדה פיצול של $f(x) \in T[x]$. $K = T(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ הם כל שורשי $f(x)$.
 $S = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. $S \supseteq L$ וגם $S \leq K$, וברור ש S הוא שדה הפיצול של $f(x)$ מעל L .
 $L \vee K$ הוא שדה מפצל של $f(x)$, לכן בהכרח יש שוויון $S = L \vee K$.

$$\sigma \in \text{Gal}(L \vee K/L) \xrightarrow{i} \text{Gal}(L \vee K/T) \xrightarrow{\rho} \text{Gal}(K/T)$$

(הצמצום ρ מותר כי K/T גלואה)

$$\varphi(\sigma) = \rho \circ i(\sigma)$$

נראה ש φ חח"ע:

אם $\text{Id}_K = \varphi(\sigma)$ אזי σ קבוע את L , וגם קבוע את K ...
 $\varphi(H) \leq G$
 בגלל ש K/T גלואה:

$$K^G = T \quad G^{\varphi(H)} \geq T$$

צריך להוכיח $T \supseteq K^{\varphi(H)}$. ניקח $a \in K^{\varphi(H)} \iff a \in K \vee L$ והוא נקבע ע"י כל האיברים ב H , אבל $L \vee K/L$ גלואה, ולכן $(L \vee K)^H = L$ ולכן $a \in L \cap K = T$.

שימוש במשפט היסודי של תורת גלואה

$$H \leq \text{Gal}(E/F) \longleftrightarrow E^H$$

תרגיל

מצאו את חבורת גלואה וכל שדות הביניים של E/\mathbb{Q} כאשר E שדה הפיצול של $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$.

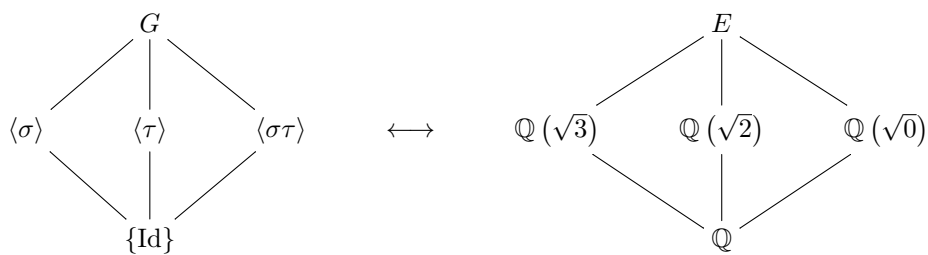
פתרון

$$G = \text{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$$\sigma : \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}, \sqrt{3} \mapsto \sqrt{3}$$

$$\tau : \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$$



$$\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$$

$$\sigma\tau(\sqrt{6}) = \sqrt{6} \quad \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$$

$$\implies E^{\langle \sigma\tau \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$$

תרגיל

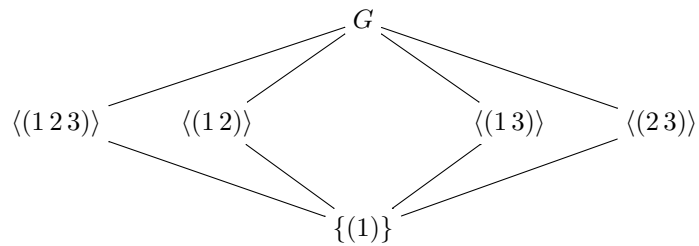
כמו התרגיל הקודם רק עם $f(x) = x^3 - 2$

פתרון

$$E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} = \alpha, \rho_3\alpha, \rho_3^2\alpha) \quad \text{Gal}(E/\mathbb{Q}) = S_3$$

הת"ח של S_3 הן $\{(1)\}, S_3$.
 ת"ח מסדר 3: $\{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$
 ת"ח מסדר 2: $\langle(1\ 2)\rangle, \langle(1\ 3)\rangle, \langle(2\ 3)\rangle$

$$\sqrt{1} = \alpha \quad \sqrt{2} = \rho_3\alpha \quad \sqrt{3} = \rho_3^2\alpha$$



זוה מתאים ל

