הערה מהתרגול הקודם

אם $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ אי־פריק מדרגה t, וגם a שורש של $f(x)$, אזי $a, a^p, a^{p^2}, a^{p^3}, \dots a^{p^{t-1}}$ הם כל שורשי $f(x)$.

דוגמה

$$f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 1$$

נתון פולינום אי־פריק ב$\mathbb{Q}[x]$. $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = S_3 \vee \mathbb{Z}_3$. אם יש שורש מרוכב אזי S_3.
בעזרת אינפי ניתן להוכיח שקיים שורש מרוכב.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 3 = 0$$

הדיסקרימיננטיה היא $\Delta = -32 < 0$

א. לפולינום מדרגה אי־זוגית יש שורש ממשי(משפט ערך הביניים).

ב. לפי משפט רול - לפולינום שלנגזרתו אין שורשים ממשיים יש לכל היותר שורש אחד.

לפי א' וב' יש שורש ממשי יחיד, לכן בהכרח יש שני שורשים מרוכבים ולכן $\mathrm{Gal} = S_3$.

תרגיל

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & E \arrow[d, dash] & \\
 & L \vee K \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
L \arrow[dr, dash] & & K \arrow[dl, dash] \\
 & F &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & E \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
L \arrow[dr, dash] & & K \arrow[dl, dash] \\
 & F &
\end{tikzcd}$$

אם $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ קובע את L, K אזי σ קובע את $L \vee K$.

פתרון

אם σ לא קובע את $L \vee V$ אזי $B = E^{\langle \sigma \rangle} \cap (L \vee K) \subseteq L \vee K$. $B \geq L$ וגם $\Delta \geq K$ כי σ קובע, ולכן $B \geq L \vee K$ - וזו סתירה.

תרגיל

$$\begin{tikzcd}
& L\vee K \arrow[dl, equal] \arrow[dr, dash] & \\
L \arrow[dr, dash] & & K \arrow[dl, equal] \\
& T=K\cap L &
\end{tikzcd}$$

K/T הרחבת גלואה. אזי $L\vee K/L$ היא הרחבת גלואה, וגם קיים $\varphi:\mathrm{Gal}\left(L\vee K/L\right)\to\mathrm{Gal}\left(K/T\right)$ איזומורפיזם.

פתרון

K שדה פיצול של $f\left(x\right)\in T\left[x\right]$. $K=T\left(\alpha_1,\dots\alpha_m\right)$. כאשר $\alpha_1,\dots\alpha_m$ הם כל שורשי $f\left(x\right)$.

$S=L\left(\alpha_1,\dots\alpha_m\right)$. $S\supseteq L$ וגם $S\le K$, וברור שS הוא שדה הפיצול של $f\left(x\right)$ מעל L.

$L\vee K$ הוא שדה מפצל של $f\left(x\right)$, לכן בהכרח יש שוויון $S=L\vee K$.

$$\sigma\in\mathrm{Gal}\left(L\vee K/L\right)\overset{i}{\hookrightarrow}\mathrm{Gal}\left(L\vee K/T\right)\xrightarrow{\rho}\mathrm{Gal}\left(K/T\right)$$

(הצמצום ρ מותר כי K/T גלואה)

$$\varphi\left(\sigma\right)=\rho\circ i\left(\sigma\right)$$

נראה שφ חח"ע:

אם $\varphi\left(\sigma\right)=\mathrm{Id}_K$ אזי σקבוע את L, וגם קובע את K...

$\varphi\left(H\right)\le G$

בגלל שK/T גלואה:

$$K^G=T \qquad G^{\varphi(H)}\ge T$$

צריך להוכיח $K^{\varphi(H)}\supseteq T$. ניקח $a\in K^{\varphi(H)}\Longleftarrow a\in K\vee L$ והוא נקבע ע"י כל האיברים בH, אבל $L\vee K/L$ גלואה, ולכן $\left(L\vee K\right)^H=L$ ולכן $a\in L\Longleftarrow a\in L\cap K=T$.

שימוש במשפט היסודי של תורת גלואה

$$H\le\mathrm{Gal}\left(E/F\right)\longleftrightarrow E^H$$

תרגיל

מצאו את חבורת גלואה וכל שדות הביניים של $E/\mathbb{Q}$ כאשר E שדה הפיצול של $f\left(x\right) = \left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)$.

פתרון

$$G = \mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$$

$$\sigma : \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}, \sqrt{3} \mapsto \sqrt{3}$$

$$\tau : \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & G \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\langle\sigma\rangle \arrow[dr] & \langle\tau\rangle \arrow[d] & \langle\sigma\tau\rangle \arrow[dl] \\
 & \{\mathrm{Id}\} &
\end{tikzcd}
\qquad \longleftrightarrow \qquad
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & E \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) \arrow[dr] & \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \arrow[d] & \mathbb{Q}\left(\sqrt{0}\right) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$$

$$\sigma\tau\left(\sqrt{6}\right) = \sqrt{6} \qquad \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$$

$$\implies E^{\langle\sigma\tau\rangle} = \mathbb{Q}\left(\sqrt{6}\right)$$

תרגיל

כמו התרגיל הקודם רק עם $\mathbb{Q}\left[x\right] \ni f\left(x\right) = x^3 - 2$

פתרון

$$E=\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}=\alpha,\rho_3\alpha,\rho_3^2\alpha\right)\qquad \mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)=S_3$$

התת"ח של S_3 הן S_3 , $\{(1)\}$.

ת"ח מסדר 3: $H=\left\{(1),\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\right\}$

ת"ח מסדר 2: $\left\langle\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\right\rangle,\left\langle\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\right\rangle,\left\langle\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}\right\rangle$

$$\sqrt{1}=\alpha\qquad \sqrt{2}=\rho_3\alpha\qquad \sqrt{3}=\rho_3^2\alpha$$

$$\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\langle(1\,2\,3)\rangle \arrow[drr, dash] & \langle(1\,2)\rangle \arrow[dr, dash] & & \langle(1\,3)\rangle \arrow[dl, dash] & \langle(2\,3)\rangle \arrow[dll, dash] \\
 & & \{(1)\} & &
\end{tikzcd}$$

וזה מתאים ל

$$\begin{tikzcd}
 & & E=\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2},\rho_3\right) \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\mathbb{Q}\left(\rho_3\right) \arrow[drr, dash] & \mathbb{Q}\left(\rho_3^2\alpha\right) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}\left(\rho_3\alpha\right) \arrow[dl, dash] & \mathbb{Q}\left(\alpha\right) \arrow[dll, dash] \\
 & & \mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$