

תרגיל

בניית מצולע משוכלל בן 15 צלעות.

פתרון

מצולע משוכלל בן n צלעות.

תיזכורת: משפט גאוס: מצולע משוכלל בן n צלעות ניתן לבנייה אם ורק אם $n = 2^t \cdot p_1 \cdots p_k$ כאשר לכל $1 \leq i \leq k$ הוא ראשוני פרמה - כלומר $p_i = 2^{2^t} + 1$.

בניית מצולע שקולה לבניית ρ_n .
 $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\rho_n)/\mathbb{Q}) = U_n$, ואנחנו רוצים ש $|U_n| = 2^m$, ובחירת n כנ"ל מבטיחה זאת.

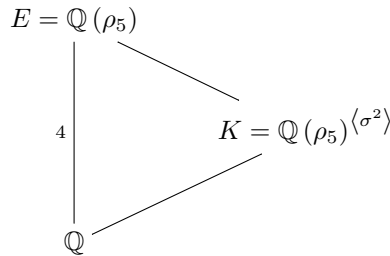
$$n = \underbrace{5}_{l=0} \cdot \underbrace{3}_{l=0}$$

צריך לבנות את ρ_{15} :

$$\rho_{15} \neq \rho_5 \cdot \rho_3$$

$$\rho_{15} = \rho_5^2 + \rho_3^2$$

ρ_3 ניתן לבנייה: $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1 = 0$ והשורשים הם $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, ולכן $\rho_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.
 לגבי ρ_5 :



$$\sigma : \rho_5 \mapsto \rho_5^2$$

$$\text{tr}_{E/\mathbb{Q}}(\rho_5) = \rho_5 + \rho_5^2 + \rho_5^3 + \rho_5^4 = -1$$

$$\Phi_5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\text{tr}_{E/K}(\rho_5) = \rho_5 + \sigma^2(\rho_5) = \rho_5 + \rho_5^{-1} \in K$$

נמצא פולינום מינימלי מעל \mathbb{Q} :

$$\sigma(\rho_5 + \rho_5^{-1}) = \rho_5^2 + \rho_5^3$$

$$(x - (\rho_5 + \rho_5^{-1})) (x - (\rho_5^2 + \rho_5^3)) = x^2 - \text{tr}_{E/\mathbb{Q}}(\rho_5) x + (\rho_5 + \rho_5^{-1}) (\rho_5^2 + \rho_5^3) = x^2 + x - 1$$

השורשים הם $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ כלומר $\rho_5 + \rho_5^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. נמצא פולינום מינימלי של ρ_5 מעל $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$: הצמוד של ρ_5 מעל K הוא $\rho_5^{-1} = \sigma^2(\rho_5)$.

$$\begin{array}{c} E \\ | \\ \text{Gal} = \langle \sigma^2 \rangle \\ | \\ K \end{array}$$

$$(x - \rho_5) (x - \rho_5^{-1}) = x^2 - (\rho_5 + \rho_5^{-1}) x + 1$$

השורשים הם: $\rho_5 = \square + \square, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{-12 - 2\sqrt{5}}$

תרגיל

כל שדה סגור אלגברית הוא אינסופי

פתרון

$$|F| = p^n$$

$$x(x-1)$$

$$F \rightarrow F$$

לא על

$$p(x) = x(x-1) - a$$

$\Leftarrow F$ שדה פיצול של $x^{p^n} - x$. הפולינום $x^{p^{n+1}} - x$ ספרבילי וכל שורשיו שונים. אם הוא מתפצל מעל F היו ב F p^{n+1} איברים - וזו סתירה.

תרגיל

בנו שרשרת אינסופית של שדות סופיים:

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots$$

שדה הפיצול של $x^{p^n} - x$ הוא תת שדה של שדה הפיצול של $x^{p^m} - x$ כאשר $n \mid m$.

תרגיל

מצאו את כל שדות הביניים של $\mathbb{Q}(\rho_n)$.

פתרון

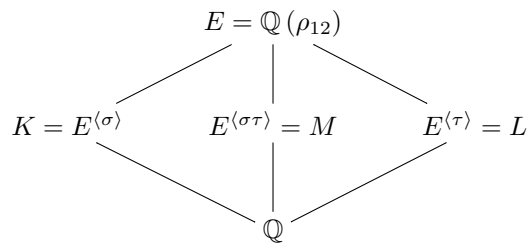
$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\rho_{12})/\mathbb{Q}) = U_{12}$$

$$|U_{12}| = \phi(12) = 4$$

$$U_{12} = \{1, 5, 7, 11\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$\sigma : \rho_{12} \mapsto \rho_{12}^5 \quad \tau : \rho_{12} \mapsto \rho_{12}^{-1}$$

$$\sigma\tau : \rho_{12} \mapsto \rho_{12}^7 = \rho_{12}^{-5}$$



צריך לחשב את Φ_{12} :

$$\Phi_{12} = \frac{x^{12} - 1}{\cancel{\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_6}} \cdot \frac{\cancel{\Phi_1\Phi_2\Phi_3}}{x^6 - 1} = x^4 - x^2 + 1$$

$$\text{tr}_{E/\mathbb{Q}}(\rho_{12}) = 0$$

$$\text{tr}_{E/K}(\rho_{12}) = \rho_{12} + \rho_{12}^5$$

$$(x - (\rho_{12} + \rho_{12}^5))(x - (\rho_{12}^{-1} + \rho_{12}^{-5}))$$

$$x = \square + \square$$