תרגיל

בניית מצולע משוכלל בן 15 צלעות.

פתרון

מצולע משוכלל בן n צלעות.

תזכורת: משפט גאוס: מצולע משוכלל בן n צלעות ניתן לבנייה אם ורק אם $n = 2^t \cdot p_1 \cdots p_k$ כאשר לכל $1 \le i \le k$ p_i הוא ראשוני פרמה - כלומר $p_i = 2^{2^l} + 1$.

בניית מצולע שקולה לבניית ρ_n.
$\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\rho_n\right)/\mathbb{Q}\right) = U_n$, ואנחנו רוצים ש$|U_n| = 2^m$, ובחירת n כנ"ל מבטיחה זאת.

$$n = \underbrace{5}_{l=0} \cdot \underbrace{3}_{l=0}$$

צריך לבנות את ρ_{15}:

$$\rho_{15} \neq \rho_5 \cdot \rho_3$$

$$\rho_{15} = \rho_5^2 + \rho_3^2$$

ρ_3 ניתן לבנייה: $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1 = 0$ והשורשים הם $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, ולכן $\rho_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.
לגבי ρ_5:

$$\begin{tikzcd}
E = \mathbb{Q}\left(\rho_5\right) \arrow[dd, dash, "4"'] \arrow[dr, dash] & \\
& K = \mathbb{Q}\left(\rho_5\right)^{\left\langle \sigma^2 \right\rangle} \arrow[dl, dash] \\
\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

$$\sigma : \rho_5 \mapsto \rho_5^2$$

$$\mathrm{tr}_{E/\mathbb{Q}}\left(\rho_5\right) = \rho_5 + \rho_5^2 + \rho_5^3 + \rho_5^4 = -1$$

$$\Phi_5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\mathrm{tr}_{E/K}\left(\rho_5\right) = \rho_5 + \sigma^2\left(\rho_5\right) = \rho_5 + \rho_5^{-1} \in K$$

נמצא פולינום מינימלי מעל $\mathbb{Q}$:

$$\sigma\left(\rho_5 + \rho_5^{-1}\right) = \rho_5^2 + \rho_5^3$$

$$\left(x-(\rho_5+\rho_5)^{-1}\right)\left(x-\left(\rho_5^2+\rho_5^3\right)\right)=x^2-\mathrm{tr}_{E/\mathbb{Q}}(\rho_5)\,x+\left(\rho_5+\rho_5^{-1}\right)\left(\rho_5^2+\rho_5^3\right)=x^2+x-1$$

השורשים הם $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ כלומר $\rho_5+\rho_5^{-1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. נמצא פולינום מינימלי של ρ_5 מעל $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$: הצמוד של ρ_5 מעל K הוא $\rho_5^{-1}=\sigma^2(\rho_5)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}=\langle\sigma^2\rangle"] \\ K \end{tikzcd}$$

$$(x-\rho_5)\left(x-\rho_5^{-1}\right)=x^2-\left(\rho_5+\rho_5^{-1}\right)x+1$$

השורשים הם: $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-12-2\sqrt{5}}$, $\rho_5=\square+\square$.

תרגיל

כל שדה סגור אלגברית הוא אינסופי

פתרון

$$|F|=\rho^n$$

$$x\,(x-1)$$

$$F\to F$$

לא על

$$p\,(x)=x\,(x-1)-a$$

$\Longleftarrow$ F שדה פיצול של $x^{\rho^n}-x$.
הפולינום $x^{p^{n+1}}-x$ ספרבילי וכל שורשיו שונים. אם הוא מתפצל מעל F היו בF p^{n+1} איברים - וזו סתירה.

תרגיל

בנו שרשרת אינסופית של שדות סופיים:

$$F_0\subset F_1\subset F_2\subset\cdots$$

שדה הפיצול של $x^{p^n}-x$ הוא תת שדה של שדה הפיצול של $x^{p^m}-x$ כאשר $n\mid m$.

תרגיל

מצאו את כל שדות הביניים של $\mathbb{Q}\left(\rho_n\right)$.

פתרון

$$\operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\rho_{12}\right)/\mathbb{Q}\right) = U_{12}$$

$$\left|U_{12}\right| = \phi\left(12\right) = 4$$

$$U_{12} = \{1, 5, 7, 11\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$\sigma : \rho_{12} \mapsto \rho_{12}^5 \qquad \tau : \rho_{12} \mapsto \rho_{12}^{-1}$$

$$\sigma\tau : \rho_{12} \mapsto \rho_{12}^7 = \rho_{12}^{-5}$$

$$\begin{tikzcd}
 & E = \mathbb{Q}\left(\rho_{12}\right) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K = E^{\langle\sigma\rangle} \arrow[dr, dash] & E^{\langle\sigma\tau\rangle} = M \arrow[d, dash] & E^{\langle\tau\rangle} = L \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

צריך לחשב את Φ_{12}:

$$\Phi_{12} = \frac{x^{12} - 1}{\cancel{\Phi_1\Phi_2\Phi_3}\Phi_4\cancel{\Phi_6}} \cdot \frac{\cancel{\Phi_1\Phi_2\Phi_3}}{x^6 - 1} = x^4 - x^2 + 1$$

$$\operatorname{tr}_{E/\mathbb{Q}}\left(\rho_{12}\right) = 0$$

$$\operatorname{tr}_{E/K}\left(\rho_{12}\right) = \rho_{12} + \rho_{12}^5$$

$$\left(x - \left(\rho_{12} + \rho_{12}^5\right)\right)\left(x - \left(\rho_{12}^{-1} + \rho_{12}^{-5}\right)\right)$$

$$x = \square + \square$$