$f : X \to Y$ שקילות הומוטופית אם יש $g : Y \to X$ כך ש $\begin{matrix} g \circ f \sim Id_X \\ f \circ g \sim Id_Y \end{matrix}$

הגדרה

יהי $A \subseteq X$ תת מרחב. נסמן $i : A \to X$ את העתקת ההכלה.

A נקרא <u>נסג</u> של X אם קיימת $r : X \to A$ כך ש$r \circ i = Id_A$.

במילים אחרות זוהי העתקה $r : X \to A$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $r(a) = a$.

דוגמה

עבור X מרחב 8 ו$A \subset X$ תת מרחב של אחד העיגולים של ה8, r "מקפלת" את אחד העיגולים על העיגול השני.

שפה איננה נסג

$\begin{matrix} X = I\,(= [0,1]) \\ A = \partial I\,(= \{0,1\}) \end{matrix}$ - השפה איננה נסג. אי אפשר להעתיק את הקטע לקצוות בצורה רציפה ולהשאיר את הקצוות במקומן.

$D^n = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n | \|(x_1, \dots x_n)\| \leq 1\}$

$\begin{matrix} X = D^2 \\ A = \partial D^2 \end{matrix}$ - גם כאן - המעגל איננו נסג של העיגול.

הגדרה

יהי $A \subseteq X$ תת מרחב.

A נקרא נסג עיוותי של X אם קיימת הומוטופיה $H : X \times I \to 1$ כך ש

1. $H(x,0) = x$ לכל $x \in X$
2. $H(a,t) = a$ לכל $a \in A$
3. $H(x,1) \in A$ לכל $x \in X$

הערה

ההעתקה $r(x) = H(x,1)$ היא בפרט נסיגה מX לA.

דוגמה

עיגול של 8 אינו נסג עיוותי של כל מרחב ה8 - למרות שהוא כן נסג.

טענה

אם $A \subseteq X$ נסג עיוותי אז העתקת ההכלה $i : A \to X$ היא שקילות הומוטופית.

הוכחה

תהי $H : X \times I \to X$ הומוטופיה כפי שמופיע בהגדרת נסג עיוותי.
נגדיר $r : X \to A$ ע"י $r(x) := H(x,1)$. $r \circ i = Id_A$ ומתקיים $i \circ r \sim Id_X$, ולכן H היא הומוטופיה מId_X ל$i \circ r$.

דוגמאות

$$X = \mathbb{R}^n - \{0\} \qquad A = S^{n-1}$$

איך נגדיר נסג עיוותי מX לA?

הרעיון: לכל נקודה $x \in X$, מותחים קרן מראשית הצירים לx, וההומוטופיה תזיז בצורה רציפה את הנקודה על הקרן עד שמרחקה מהראשית יהיה 1.

נגדיר $H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ ע"י

$$H(x,t) := (1-t)\,x + t \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

הגדרה

מ"ט X יקרא <u>כוויץ</u> אם Id_X הומוטופית להעתקה קבועה.

תרגיל

X כוויץ אם"ם X שקול הומוטופית למרחב של נקודה אחת.

משפט

$\mathbb{R}^n$ כוויץ.

הוכחה

נגדיר $H \cdot \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ כך: $H(x,t) := (1-t)\,x$

הערה

לא כל מרחב קשיר מסילתית הוא כוויץ - לא מספיק שאפשר לתאר מסלול מכל נקודה לנקודה הסופית, צריך שכל המסלולים של כל הנקודות יהוו פונקציה רציפה אחת.

הערה

אותה הוכחה(על $\mathbb{R}^n$) תראה שכל קבוצה קמורה ב$\mathbb{R}^n$ היא מרחב כויץ.

תזכורת: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת קמורה אם לכל $x, y \in A$ ולכל $0 \leq t \leq 1$ גם $(1-t)\,x+ty \in A$

הוכחה

נבחר $a \in A$ ונגדיר $H : A \times I \to A$ כך: $H\,(x,t) := (1-t) + ta$

הגדרה

יהיו $f, g : X \to Y$, $A \subseteq X$.

נאמר שf הומוטוהומוטופית לg ביחס לApית לg ביחס לA ונסמן $f \underset{A}{\sim} g$ אם קיימת הומוטופיה $H : X \times I \to Y$ מf לg(כלומר $\begin{matrix} H\,(x,0) = f\,(x) \\ H\,(x,1) = g\,(x) \end{matrix}$ לכל $x \in X$) כך ש$H\,(a,t) = H\,(a,0)$ לכל $a \in A$.

בלשום זו ניתן לומר ש$X \supseteq A$ נסג עיוותי אם יש $r : X \to A$ כך ש$r \circ i = Id_A$ ו$Id_X \underset{A}{\sim} i \circ r$.

תרגיל

$g \underset{A}{\sim} f$ הוא יחס שקילות על ההעתקה $X \to Y$

הגדרה

זוג מרחבים הוא מ"ט X ותת מרחב A, זה מסומן כך: (X, A).

העתקה של זוגיות:$f : (X,A) \to (Y,B)$ היא העתקה(רציפה) $f : X \to Y$ כך ש$f\,(A) \subseteq B$.

תרגיל

יהיו $\begin{matrix} f, f' : (X,A) \to (Y,B) \\ g, g' : (Y,B) \to (Z,C) \end{matrix}$.

אם $f \underset{A}{\sim} f'$ ו$g \underset{B}{\sim} g'$ אז $g \circ f \underset{A}{\sim} g' \circ f'$.

הגדרה

$f : X \to Y$ תקרא נול־הומוטופית אם f הומוטופית להעתקה קבועה.

(בלשון זו ניתן לומר: X כוויץ אם Id_X היא נול־הומוטופית)

משפט

יהי X מ"ט, $f:S^1\to X$. אזי התנאים הבאים על f שקולים:

א. f נול־הומוטופית.

ב. f נול־הומוטופית ביחס לנקודה כלשהי $a\in S^1$

ג. f ניתנת להרחבה ל־D^2[1](כלומר יש $F:D^2\to X$ כך ש־$F|_{S^1}=f$)

הערה: זה נכון גם עבור S^n, D^{n+1}. הוכחה זהה.

הוכחה

ב$\Leftarrow$א ברור

א$\Leftarrow$ג נתון שקיימת $H:S^n\times I\to X$ כך ש־$H(x,0)=f(x)$ לכל $x\in X^1$ ויש $p\in X$ כך ש־$H(x,1)=P$ לכל $x\in S^1$.

נגדיר $\rho:S^1\times I\to D^2$ ע"י $\rho(x,t):=(1-t)\,x$

טענה: ρ היא העתקת מנה, כי $S^1\times I$ קומפקטי ו־D^2 האוסדורף[2].

לכל $(x_1,t_1),(x_2,t_2)\in S^1\times I$ המקיימות $\rho(x_1,t_1)=\rho(x_2,t_2)$ מתקיים ש־$H(x_1,t_1)=H(x_2,t_2)$(אכן הנקודות השונות היחידות שמקיימות שוויון עבור ρ הן מהצורה $(x,1),(y,1)$ ועוברן אכן מתקיים $H(x,1)=H(y,1)$).

לכן H משרה העתקה מוגדרת היטב $F:D^2\to X$. וכיוון ש־ρ העתקת מנה, F הזאת רציפה.

ג$\Leftarrow$ב נתונה $F:D^2\to X$ כך ש־$F|_{S^1}=f$. תהי $a\in S^1$. נבנה נול הומוטופיה של f ביחס ל־$\{a\}$.

נגדיר $\eta:S^1\times I\to D^2$ ע"י $\eta(x,t):=(1-t)\,x+ta$.

לכל t מתקיים $\eta(a,t)=a$, ולכל $x\in S^1$ מתקיים $\eta(x,1)=a$, ולכן $F\circ\eta:S^1\times I\to X$ מקיימת $F\circ\eta(a,t)=F(a)=f(a)$ לכל t. כלומר זוהי הומוטופיה ביחס ל־$\{a\}$, וגם מתקיים $F\circ\eta(x,1)=F(a)$ לכל $x\in S^1$. כלומר זוהי הומוטופיה ביחס ל־$\{a\}$.

הגדרה

מ"ט X יקרא <u>פשוט קשר</u> אם:

א. X קשיר מסילתית.(שקול לכך שכל העתקה $S^0\to X$ היא נול־הומוטופית)

ב. כל העתקה $S^1\to X$ היא נול־הומוטופית.

[1] D^2 זה העיגול, S^1 זה המעגל. $S^1=\partial D^2$

[2] כל שתי נקודות אפשר להפריד ע"י שתי קבוצות פתוחות זרות.

הגדרה

יהי X מ"ט, $x, b \in X$.

נסמן בΓ_{ab} את כל קבוצת המסילות $\gamma : I \to X$ מ a לb. כלומר $\begin{array}{c} \gamma(0) = a \\ \gamma(1) = b \end{array}$.

הגדרה

אם $\gamma \in \Gamma_{ab}$ ו$\delta \in \Gamma_{bc}$ אז ניתן לשרשר את γ עם δ, כלומר קיימת המסילה $\gamma * \delta = \gamma \cdot \delta = \gamma\delta$.

הגדרה

על Γ_{ab} נביט ביחס השקילות $\gamma \underset{\partial I}{\sim} \delta$ (כזכור $\partial I = \{0, 1\}$)

משפט

אם $\gamma, \gamma' \in \Gamma_{ab}$ ו$\gamma \underset{\partial I}{\sim} \gamma'$ ו$\delta, \delta' \in \Gamma_{bc}$ ו$\delta \underset{\partial I}{\sim} \delta'$ אז $\gamma * \delta \underset{\partial I}{\sim} \gamma' * \delta'$

כלומר

ראינו שניתן להגדיר כפל בין איבר $[\gamma] \in \hat{\Gamma}_{ab}$ ו$[\delta] \in \hat{\Gamma}_{bc}$ ע"י $[\gamma]\,[\delta] := [\gamma * \delta]$