פתירות על ידי רדיקלים

תזכורת:

פולינום $f\in F[x]$ פתיר לפי רדיקלים $\iff$ $Gal(E/F)$ ($E=$ שדה הפיצול של f מעל F) פתירה.

תרגיל:

האם $f(x)=5x^5-100x+10\in\mathbb{Q}[x]$ פתיר על ידי רדיקלים?

פתרון:

$f(x)$ אי-פריק לפי אייזנשטיין עם $p=2$. $E=$ שדה הפיצול של f מעל $\mathbb{Q}$.

כדי לחשב את $Gal(E/\mathbb{Q})$ נבחן את השורשים של f:

$$f'(x)=25x^4-100 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

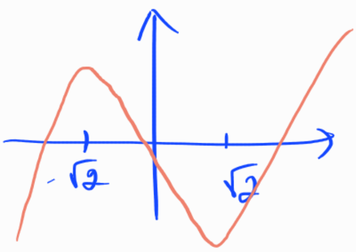
חשודות לקיצון

$$f''(x)=100x^3$$

$f''(\sqrt{2})>0 \Rightarrow$ מינימום, $f(\sqrt{2})<0$

$f''(-\sqrt{2})<0 \Rightarrow$ מקסימום, $f(-\sqrt{2})>0$

ולכן הגרף נראה כך:



$\Leftarrow$ 3 שורשים ממשיים, 2 מרוכבים

לפי תרגיל שראינו, $Gal(E/\mathbb{Q})\cong S_5$ לא פתירה $\Leftarrow$ f אינו פתיר לפי רדיקלים.

תרגיל:

האם הפולינום $f(x)=x^6-3x^3+6\in\mathbb{Q}[x]$ פתיר ע"י רדיקלים?

פתרון:

השורשים של $f(x)$ מתקבלים ע"י הצבת $t=x^3$ ופתרון המשוואה הריבועית

$$t^2-3t+6=0$$

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}$$

לכן $f(x)=\underbrace{\left(x^3-\frac{3+\sqrt{-15}}{2}\right)}_{f_1}\underbrace{\left(x^3-\frac{3-\sqrt{-15}}{2}\right)}_{f_2}$.

שדה הפיצול E של f הוא $E=E_1E_2$, כאשר $E_i=$ שדה הפיצול של f_i מעל $\mathbb{Q}$.

$\deg f_i=3$ $\Leftarrow$ f_i פתיר לפי רדיקלים $\Leftarrow$ E_i הרחבה ע"י רדיקלית של $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$

לכן $E=E_1E_2$ הרחבה רדיקלית של $\mathbb{Q}$ $\Leftarrow$ f פתיר לפי רדיקלים.

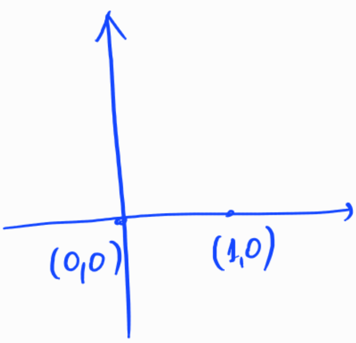
בניות מסרגל ומחוגה

כלים:

← סרגל בלי שנתות

← מחוגה

← בהינתן ישרים ומעגלים, אפשר לסמן את נקודות החיתוך שלהם.



הגדרה: constructible

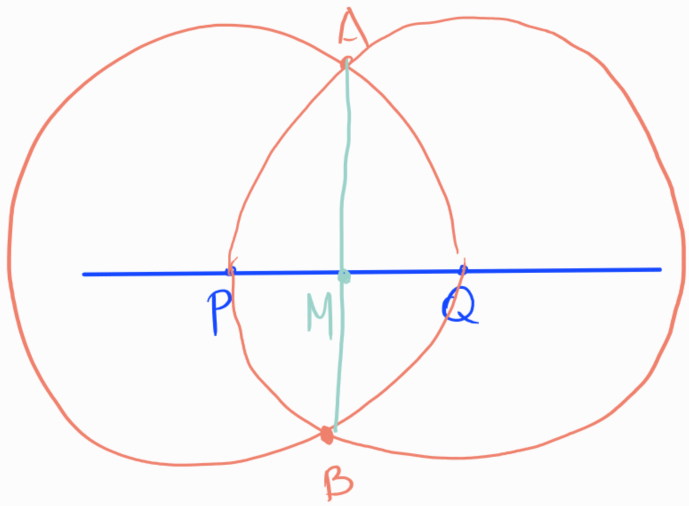
מספר $a\in\mathbb{R}$ הוא <u>בר-בנייה</u>, אם אפשר מהתנאים הנ"ל להגיע ל- $(a,0)$.

מספר $a+bi\in\mathbb{C}$ הוא <u>בר-בנייה</u> אם a,b בני-בנייה.

תרגיל:

נניח שנתונות נקודות P ו-Q. הראו שאפשר לבנות את אמצע הקטע PQ.

פתרון:



שלב 1 - נצייר שני מעגלים

נסמן את נקודות החיתוך

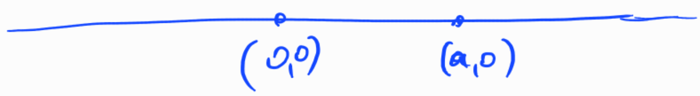
שלב 2 - נעביר את הישר ביניהן ונסמן את נקודת החיתוך

תרגיל:

נניח a,b בני-בנייה. אז $a+b$ בר-בנייה.

פתרון:

דרך I: מעגל שמרכזו $(a,0)$ ורדיוס b.



יחתוך את ציר x בנקודות $(a+b,0)$, $(a-b,0)$

מסקנה:

קבוצת המספרים בני-הבנייה סגורה לחיבור ולחיסור.

תרגיל: (לבית)

קבוצת המספרים בני-הבנייה היא שדה.

כלומר, אם $a,b\neq 0$ בני-בנייה, גם ab ו- $\frac{a}{b}$ בני-בנייה.

תרגיל:

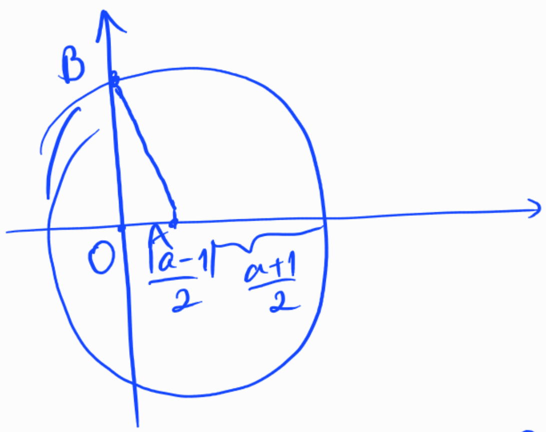
יהי $a>0$ בר-בנייה. אז גם $\sqrt{a}$ בר-בנייה.

פתרון:

משני התרגילים הקודמים, $\frac{a+1}{2}$, $\frac{|a-1|}{2}$ בני-בנייה.

נעביר מעגל שמרכזו ב- $A=\left(\frac{|a-1|}{2},0\right)$

ורדיוסו $\frac{a+1}{2}$.



$B=$ החיתוך של המעגל עם ציר y.

AOB ישר זווית

$$OB^2=AB^2-AO^2=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-\left(\frac{|a-1|}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{a^2+2a+1}{4}-\frac{a^2-2a+1}{4}=a$$

$\Leftarrow$ $OB=\sqrt{a}$.

הגדרה:

הרחבת שדות סופית E/F היא ריבועית חוזרת אם קיימים שדות ביניים

$$F=F_0\subseteq F_1\subseteq F_2\subseteq\dots\subseteq F_n=E$$

כך ש- $[F_i:F_{i-1}]=2$.

משפט:

יהי $a\in\mathbb{C}$. יהי f_a הפולינום המינימלי של a מעל $\mathbb{Q}$.

a בר-בנייה $\Longleftrightarrow$ שדה הפיצול של f_a הוא הרחבה ריבועית חוזרת של $\mathbb{Q}$.

$\Leftrightarrow$ $Gal(E/\mathbb{Q})$ חבורת-2.

מסקנה:

אם a בר-בנייה אז $\deg f_a$ חזקת 2. אבל ההפך לא נכון.

תרגיל: (ממבחן)

האם $e^{\frac{2\pi i}{7}}$ בר-בנייה?

פתרון:

לא, כי ראינו שדרגת הפולינום המינימלי שלו היא $\varphi(7)=6$

לא חזקת 2.

הערה:

ρ_n בר-בנייה $\Leftrightarrow$ אפשר לבנות מצולע משוכלל עם n צלעות.

תרגיל:

האם באמצעות סרגל ומחוגה ניתן לחלק זווית לשבע?

פתרון:

אילו היה אפשר, היינו מחלקים את 2π ל-7 ומקבלים את ρ_7, בסתירה.

[כי היינו יודעים לבנות משובע משוכלל]

תרגיל:

יהי p ראשוני מהצורה $p=2^n+1$. הוכיחו כי ρ_p בר-בנייה.

פתרון:

$\mathbb{Q}(\rho_p)/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה, עם חבורת גלואה $\cong U_p$.

זו חבורה מסדר $\varphi(p)=2^n$, לכן זו חבורת-2, ומכאן ש-ρ_p בר-בנייה.

הערה:

ρ_n בר-בנייה $\Leftrightarrow$ $|U_n|=\varphi(n)$ חזקת 2.

$\Updownarrow$

אפשר לבנות מצולע משוכלל עם n צלעות

תרגיל:

תהי E/F הרחבת גלואה עם שדות ביניים K_1, K_2 כך ש- $K_1/F, K_2/F$ הרחבות ממימד שהוא חזקת 2. האם גם K_1K_2/F ממימד חזקת 2?

פתרון:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, no head] & \\ & K_1K_2 \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ K_1 \arrow[dr, no head] & & K_2 \arrow[dl, no head] \\ & F & \end{tikzcd}$$

לא.

ניקח $E/\mathbb{Q}$ כך ש- $Gal(E/\mathbb{Q}) \cong S_4$.

$$H_1 = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) = 1\} \leq S_4$$

$$H_2 = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(2) = 2\} \leq S_4$$

$$K_1 = E^{H_1}, \quad K_2 = E^{H_2}$$

$$|H_i| = 6 \underset{\text{התאמת גלואה}}{\Longrightarrow} [K_i : \mathbb{Q}] = [S_4 : |H_i|] = 4$$

אבל $H_1 \cap H_2 = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2\} \leq S_4$ מסדר 2, לכן

$$[K_1K_2 : F] \underset{K_1K_2 = E^{H_1 \cap H_2}}{=} [S_4 : H_1 \cap H_2] = 12$$

לא חזקת 2.