המבחן יהיה ב$tomax$.

לא בxi.

ולכן, במידה ויהיה בתומקס, כפי המסתמן- יהיה טופס קשיח למבחן. השאלות יהיו באותו סגנון של השאלות בxi שהיו בבוחן ובש"ב- שאלות חישוביות, לחשב דטרמיננטה, להפוך מטריצות, להכפיל, לפתור משוואות, ללכסן מטריצות.

לא יהיו הוכחות של משפטים.

המבנה והסגנון של השאלות יהיו כמו בשנה שעברה, יש מבחנים ב$math-wiki.com$ בעמוד של הקורס משנה שעברה.

ניתן להתאמן גם על מבחנים משנים קודמות.

המבחן שעתיים ולא 3- ולכן יהיה יותר קצר מהמבחן של שנה שעברה. (שנה שעברה היו 6 שאלות, אז השנה יהיה פחות, זה יהיה מותאם למשך הזמן של השנה).

צורת הפתרון תהיה לכתוב על דפים ולסרוק.

כל הפתרון יהיה כתוב ביד, לא במחשב.

אין דפי טיוטא. צריך לסרוק את כל מה שאתם עושים. על זה ניתן הניקוד.

כמובן שצריך להראות דרך.

מותר מחשבון פשוט. לא מחשבון מטריצות ולא מחשבון שמפרק פולינומים.

תהיה בסוף רבע שעה לסריקה.

התרגילים יהיו פתוחים עד ליום המבחן.

תזכורת: תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. ע"ע של A הוא מספר $\lambda\in\mathbb{R}$ כך שקיים וקטור $v\neq 0$ שמקיים $Av=\lambda v$.

v כנ"ל יקרא וקטור עצמי של A שמתאים לλ.

הפולינום האופייני של A הוא $p_A(x)=|xI-A|$.

הע"ע של A הם השורשים של הפולינום האופייני.

המרחב העצמי של λ שווה ל$N(A-\lambda I)=N(\lambda I-A)$.

ריבוי אלגברי של ע"ע λ שווה לחזקה הכי גבוהה של $(x-\lambda)$ שמחלקת את $p_A(x)$.

ריבוי גיאומטרי של ע"ע λ שווה למימד של המרחב העצמי שלו. $\dim N(A-\lambda I)$.

ריבוי אלגברי $\leq$ ריבוי גיאומטרי $\leq$ 1

מטריצות A וB נקראות דומות אם יש מטריצה הפיכה P כך ש$P^{-1}AP=B$.

ראינו שיחס הדמיון הוא יחס שקילות.

מטריצה A נקראת לכסינה אם היא דומה למטריצה אלסכונית.

משפט: A לכסינה אמ"ם הפ"א שלה מתפרק לגורמים לינארים, ולכל ע"ע ריבוי אלגברי=ריבוי גאומטרי.

במידה וA לכסינה המטריצה האלכסונית שדומה לה, D, מורכבת מהע"ע של A על האלכסון.

והמטריצה P שעושה את הדמיון בנויה כך- העמודות שלה הם בסיסים למרחבים העצמיים.

הערה: D יחידה עד כדי סדר האיברים באלכסון.

P לא יחידה, כי ניתן לקחת בסיסים שונים לאותו מרחב.

דוגמאות:

1. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$. קבעו האם היא לכסינה. במידה וכן, לכסנו אותה- כלומר, מצאו P הפיכה וD אלכסונית, כך ש$P^{-1}AP=D$.

פתרון: שלב ראשון, נמצא פולינום אופייני.

$$p_A(x)=|xI-A|=|\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix}x-2&-1&0\\0&x-1&1\\0&-2&x-4\end{pmatrix}|=$$

נחשב לפי מינורים עם העמודה הראשונה.

$$(x-2)|\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x-4 \end{pmatrix}| = (x-2)[(x-1)(x-4)+2] = (x-2)[x^2-5x+6] =$$

$$(x-2)^2(x-3)$$

ע"ע:

$\lambda_1 = 2$ עם ריבוי אלגברי 2.

$\lambda_2 = 3$ עם ריבוי אלגברי 1.

נמצא מרחבים עצמיים וניקח להם בסיס.

נתחיל עבור $\lambda_1 = 2$.

$$N(2I-A) = N\begin{pmatrix} 2-2 & -1 & 0 \\ 0 & 2-1 & 1 \\ 0 & -2 & 2-4 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = t$.

$y = 0$ $z = 0$.

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

המימד של המרחב העצמי הוא 1. כלומר, הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_1 = 2$ הוא 1.

כלומר, עבור הע"ע 2, הר"א והר"ג לא שווים.

לכן המטריצה לא לכסינה.

2. קבעו האם המטריצה $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ לכסינה. במידה וכן, לכסנו אותה.

כלומר, מצאו D אלכסונית וP הפיכה כך ש $P^{-1}AP = D$.

פתרון: שלב ראשון, נמצא פולינום אופייני.

$$p_A(x) = |\begin{pmatrix} x+1 & -1 & -1 \\ -1 & x+1 & -1 \\ -1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}|$$

נשלב פעולות דירוג.

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1+R_2} \xrightarrow{R_1 \to R_1+R_3} \begin{pmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ -1 & x+1 & -1 \\ -1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}$$

שתי הפעולות האלו לא משנות את הדטרמיננטה.

$$|\begin{pmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ -1 & x+1 & -1 \\ -1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}| = (x-1)|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x+1 & -1 \\ -1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}|$$

הוצאתי סקלר מהשטורה הראשונה.
תזכורת: ראינו שאם

$$A \xrightarrow{R_i \to \alpha R_i} B$$

אז

$$|B| = \alpha|A|$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x+1 & -1 \\ -1 & -1 & x+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2+R_1} \xrightarrow{R_3 \to R_3+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+2 & 0 \\ 0 & 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית, הדטרמיננטה שלה היא $(x+2)^2$.
ולכן הדטרמיינטה של המטריצה שהתחלנו איתה היא $(x-1)(x+2)^2$.

$$p_A(x) = (x-1)(x+2)^2$$

ע"ע:
$\lambda_1 = 1$ עם ר"א 1.
$\lambda_2 = -2$ עם ר"א 2.
נתחיל מלחשב ריבוי גיאומטרי לλ_2.

$$N\begin{pmatrix} -2+1 & -1 & -1 \\ -1 & -2+1 & -1 \\ -1 & -1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

אחרי3 פעולות דירוג נגיע ל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש שני משתנים חופשיים. $x=-t-s$.$y=t, z=s$

$$\begin{pmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס למרחב העצמי יהיה

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_2=-2$ הוא 2.
עבור $\lambda_1=1$ הריבוי הגיאומטרי גדול שווה מ1, וקטן שווה מהריבוי האלגברי שגם הוא 1, ולכן הריבוי הגיאומטרי שווה 1.
כלומר, הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינארים, ולכל ע"ע ר"א = ר"ג. אז המטריצה A לכסינה.

$$D = \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}\right) \vee \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(כל שאר הרכיבים הם 0)
אילו כל האפשרויות לD ולכל אחת יש P מתאימה.
בשביל למצוא את P אנחנו צריכים למצוא את המרחב העצמי של 1.

$$N\begin{pmatrix} 1+1 & -1 & -1 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ -1 & -1 & 1+1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to -R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

משתנה חופשי $z=t$. $x=t$ $y=t$

$$\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

שימוש ללכסון :

$$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)$$

$$P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP$$

כל PP^{-1} שווה לI, אז אפשר להתעלם מזה.
נישאר עם

$$P^{-1}AAAA\cdots AP = P^{-1}A^nP$$

נניח שA לכסינה. זה אומר שיש איזשהו P, D כך ש$P^{-1}AP = D$. כלומר

$$A = PDP^{-1}$$

לכן

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

D אלכסונית, ולכן D^n מחושבת ע"י העלאת איברי האלכסון בחזקת n.

מכפלה סקלרית

מכפלה סקלרית של שני וקטורים מאותו גודל $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

למשל:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 4$$

אורך של וקטור, שנקרא גם נורמה של הוקטור, מסמנים $||v||$

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

למשל:

$$|| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} || = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

זווית בין שני וקטורים, מחושבת ע"י הנוסחא הבא:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, u \rangle}{||v|| \cdot ||u||}$$

הזווית היא הפתרון של המשוואה שנמצא בטווח שבין 0 ל-π.
דוגמא: חשבו את הזווית שבין

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{2}}$$

$$\theta = 18.43$$

מעלות.