דוגמא ללכסון מטריצה

תהי $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. המטריצה האופיינית היא $\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$.

ראשית נחשב את הפולינום האופייני:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

לכן הערכים העצמיים של A הם $3,1$.

על מנת לקבל את הוקטורים העצמיים המתאימים נציב $\lambda=1,3$ במטריצה האופיינית. תחילה נציב $\lambda=3$ ונפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

מקבלים $x=y$, $z=0$. לכן $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in V_3$.

למעשה כל וקטור עצמי השייך לערך 3 הוא כפולה של $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

עתה נציב במטריצה האופיינית $\lambda=1$ ונקבל את המערכת:

$$\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר $y=0$. אין מגבלות על z,x. מרחב הפתרונות הוא:

$V_1=\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}:\ t,s\in R\right\}$. במילים אחרות $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס ל-V_1.

הוקטורים $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ הם שלושה וקטורים עצמיים והם קבוצה בת"ל.

לכן המטריצה לכסינה. המטריצה $diag(3,1,1)=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ דומה ל-A.

המטריצה ההפיכה
מלכסנת את A . ואכן

$$M=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}AM=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}M=\begin{pmatrix}0&3&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$